Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 10

1. Załóżmy, że $T : H \to H$ jest liniowym operatorem na pewnej przestrzeni Hilberta H, spełniającym warunek $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$ dla wszystkich x, $y \in H$. Wykazać, że T jest operatorem ograniczonym.

2. Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami Banacha, a $T : X \to Y$ jest operatorem liniowym. Dowieść, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego funkcjonału ograniczonego $\varphi \in Y^*$ złożenie $\varphi \circ T$ jest przekształceniem ciągłym.

3. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $T : X \to C[0,1]$ przekształceniem liniowym. Wykazać, że T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $t \in [0,1]$ istnieje stała $C(t) < \infty$ o tej własności, że

$$\left| \int_0^t T(x)(s)\, ds \right| \le C(t)\|x\|$$

dla wszystkich $x \in X$.

4. Niech X i Y będą dwoma przestrzeniami Banacha, a $T : X \to Y$ będzie ciągłym liniowym operatorem „na”. Wykazać, że istnieje taka stała $M > 0$, że dla danego $y \in Y$, możemy znaleźć $x \in X$ spełniające nierówność $\|x\|_X \le M\|y\|_Y$ oraz równość $T(x) = y$.

5. Załóżmy, że $1 < q < p$. Wykazać, że przestrzeń $L_p(0,1)$, wyposażona w normę $\|\cdot\|_q$, nie jest przestrzenią Banacha.

6. Określamy operator liniowy $T : c_{00} \to c_{00}$ wzorem

$$T(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right), \quad x = (x_n)_{n\ge 1} \in c_{00}.$$

Dowieść, że T jest ograniczony, ale T^{-1} nie ma tej własności. Czy przeczy to twierdzeniu o operatorze otwartym?

7. Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami Banacha, a $T : X \to Y$ będzie operatorem liniowym „na”, dla którego istnieje skończona stała c spełniająca

$$\|T(x)\|_Y \ge c\|x\|_X$$

dla wszystkich $x \in X$. Dowieść, że T jest operatorem ograniczonym.

8. Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, a $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ bedzie przeliczalnym gęstym podzbiorem kuli jednostkowej w X. Definiujemy $T : \ell_1 \to X$ wzorem $Tx = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$. Dowieść, że T jest operatorem ograniczonym i „na”.