Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 1

1. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną. Wykazać, że $f(x) = \|x\|$ jest funkcją ciągłą na X (w topologii generowanej przez normę).

2. Wykazać, że każda kula w przestrzeni unormowanej jest wypukła.

3. (i) Załóżmy, że K jest zbiorem zwartym. Wykazać, że $C(K)$, przestrzeń funkcji ciągłych z K w $\mathbb{R}$, wyposażona w normę supremum $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)|$, jest przestrzenią Banacha.

(ii) Załóżmy, że E jest przestrzenią topologiczną. Wykazać, że $C_{ogr}(E)$, przestrzeń funkcji ciągłych ograniczonych z E w $\mathbb{R}$, wyposażona w normę $\|f\|_\infty = \sup_{x\in E}|f(x)|$, jest przestrzenią Banacha.

4. Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną, $(a_n)_{n\geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego w X, a $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ jest pewnym podciągiem, który zbiega do $a \in X$. Wykazać, że ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ również jest zbieżny do a.

5. Niech X będzie przestrzenią wielomianów rzeczywistych na półprostej $[0,\infty)$. Dla $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ określamy normę na dwa sposoby:

$$\|f\|_1 := \sum_{k=0}^n |a_k|, \qquad \|f\|_2 = \sup_{x\geq 0} |f(x)|e^{-x}.$$

(a) Sprawdzić, że są to dobrze określone, nierównoważne normy na X.
(b) Czy w którejś z nich przestrzeń X jest zupełna?

6. Niech $C^1[0,1]$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$, które są różniczkowalne na $(0,1)$ i których pochodna przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0,1]$. Rozważmy normy

(i) $\|f\|_\infty$;
(ii) $\int_0^1 |f|$;
(iii) $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$;
(iv) $|f(0)| + \|f'\|_\infty$;
(v) $\|f\|_\infty + \sup_{x\in(0,1)} |xf'(x)|$.

Które z tych norm wprowadzają na $C^1[0,1]$ strukturę przestrzeni Banacha?

7. Załóżmy, że $(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą nieujemną. Dla $1 \leq p < \infty$ określamy

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

(i) Wykazać nierówność Höldera: dla $1 < p,\, q < \infty$ spełniających $1/p + 1/q = 1$ oraz dowolnych funkcji mierzalnych $f,\, g : X \to \mathbb{R}$ zachodzi $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(ii) Wykazać, że dla $1 \leq p < \infty$ oraz dowolnych $f,\, g : X \to \mathbb{R}$ zachodzi $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

8. Wykazać, że wszystkie normy na $\mathbb{R}^n$ są równoważne. Wskazać dwie nierównoważne normy na przestrzeni ciągów ograniczonych.

9. Wykazać, że na przestrzeni ciągów ograniczonych, topologia dyskretna oraz topologia produktowa nie są normowalne.