WARSZAWSKA SZKOŁA DOKTORSKA MATEMATYKI I INFORMATYKI

5 lipca 2023

Egzamin kwalifikacyjny

Na kolejnych stronach znajduje się 16 zadań dotyczących różnych obszarów matematyki i informatyki. Należy wybrać i rozwiązać **dowolne 4 z nich**. Każde zadanie jest warte tyle samo punktów.

Zadania można wybierać dowolnie, tj. kandydaci na studia w dyscyplinie matematyka mogą rozwiązywać także zadania "informatyczne" i na odwrót.

Większość zadań składa się z kilku podzadań, jednak każde zadanie, tj. wszystkie jego podpunkty, punktowane jest jako całość.

Możesz spróbować rozwiązać więcej niż 4 zadania. Wszystkie te rozwiązania będą ocenione, jednak **tylko 4 najlepiej ocenione zadania wejdą w skład Twojej ogólnej oceny**.

Wszystkie odpowiedzi należy odpowiednio uzasadnić. **Rozwiązania oddzielnych zadań powinny się znaleźć na osobnych kartkach**; oczywiście rozwiązanie jednego zadania może być zapisane na więcej niż jednej kartce.

Każda oddana kartka powinna być **podpisana imieniem i nazwiskiem**, a także opatrzona **numerem odpowiedniego zadania**.

Czas trwania egzaminu: 3 godziny

Powodzenia!

Analiza matematyczna

Zadanie 1. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie otwartym przedziałem. Funkcję $f\colon I \to \mathbb{R}$ nazywamy wypukłą, jeżeli $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$ dla wszelkich $x, y \in I$, $t \in [0,1]$.

(a) Udowodnić, że jeżeli $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją wypukłą, to dla każdego $x \in I$ oraz $h > 0$ takiego, że $x-h, x+h \in I$ zachodzi nierówność

$$\mathcal{I}(x,h) \coloneqq \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \varphi(x+t)\,\mathrm{d}t \geqslant \varphi(x).$$

(b) Załóżmy, że $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą o tej własności, że określona powyżej całka $\mathcal{I}(x,h)$ przyjmuje stałą wartość dla wszelkich $x, h \in (0,\infty)$ takich, że $h < x$. Czy wynika stąd, że φ jest funkcją stałą?

(c) Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i spełnia warunki

$$\begin{cases} yf_x(x,y) - xf_y(x,y) = 0 & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ f(x,0) = x^2e^{-x} & \text{dla } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć funkcję f jawnym wzorem i wykazać, że ma ona dokładnie jedno minimum lokalne właściwe i nieskończenie wiele maksimów lokalnych niewłaściwych.

(d) Wyznaczyć największą wartość $k \in \mathbb{N}$, dla której funkcja f z punktu (c) jest k-krotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$ lub pokazać, że f jest niekończenie wiele razy różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$.

Funkcje analityczne

Zadanie 2. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie niepustym, ograniczonym, spójnym zbiorem otwartym i niech $f, g\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ będą funkcjami ciągłymi na domknięciu $\overline{\Omega}$ i holomorficznymi na Ω. Symbolem $\partial\Omega$ oznaczmy brzeg zbioru Ω.

(a) Udowodnić, że

$$\max_{z\in\overline{\Omega}}(|f(z)| + |g(z)|) = \max_{z\in\partial\Omega}(|f(z)| + |g(z)|).$$

(b) Niech $\Omega = D = \{|z| < 1\}$ będzie otwartym kołem jednostkowym i niech $f, g\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ będą jak wyżej. Wykazać, że jeżeli zachodzą warunki:
   - $|f(z)| \leqslant 1$, $|g(z)| \leqslant 2$ dla $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$,
   - $|f(z)| \leqslant 3$, $|g(z)| \leqslant 1$ dla $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$,

   to $|f(0)| \cdot |g(0)| \leqslant \frac{5}{2}$.

(c) Załóżmy teraz, że Ω jest obszarem zawierającym domknięcie $\overline{D}$ oraz że $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ są funkcjami holomorficznymi spełniającymi warunki:
   - $|f(z) + z| < 1$ dla $|z| = 1$,
   - $|g(z)| < 1$ dla $|z| < 1$.

   Wykazać, że funkcja

$$h(z) \coloneqq f(z) + \frac{g(z) - g(0)}{1 - \overline{g(0)}g(z)}$$

   ma choć jeden punkt stały, tzn. istnieje takie $z \in \Omega$, że $h(z) = z$.

(d) Wykazać ponadto, że pod założeniami punktu (c) funkcja h ma w kole D dokładnie jeden punkt stały, o ile $g'(0) = 0$.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Zadanie 3. Niech $\xi_1, \xi_2, \ldots$ będzie ciągiem Bernoulliego z parametrem $x \in (0,1)$, tj. ciągiem niezależnych zmiennych losowych z rozkładem: $\mathbb{P}(\xi_k = 1) = x$, $\mathbb{P}(\xi_k = 0) = 1 - x$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Niech X będzie zmienną losową, która zlicza porażki do momentu pierwszego sukcesu w ciągu Bernoulliego, tzn. $X = \min\{k \in \mathbb{N}\colon \xi_k = 1\} - 1$.

(a) Znaleźć rozkład zmiennej X, a następnie obliczyć wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$ i wariancję $\mathbb{D}^2 X$.

(b) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych kopii zmiennej X, i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Pokazać, że dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots$ mamy

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n+k-1}{k}(1-x)^k x^n.$$

(c) Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} x^n \sum_{k=0}^{\lfloor (1-x)n/x \rfloor} \binom{n+k-1}{k}(1-x)^k,$$

gdzie $\lfloor t \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby t.

(d) Zbiór $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wyposażmy w miarę produktową, gdzie na każdej kopii $\{0,1\}$ rozważamy rozkład jednostajny: $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Dla $\overline{\omega} = (\omega_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ oraz $k \in \mathbb{N}$ definiujemy $\mathsf{i}_k(\overline{\omega}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ jako indeks k-tego wystąpienia jedynki w ciągu $\overline{\omega}$, przy czym $\mathsf{i}_k(\overline{\omega}) = \infty$ jeżeli w ciągu $\overline{\omega}$ znajduje się mniej niż k jedynek. Określmy również $\mathsf{i}_0(\overline{\omega}) \equiv 0$.

- Załóżmy, że $A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest zbiorem dodatniej miary. Pokazać, że istnieje $\overline{\omega} \in A$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że
$$(\mathsf{i}_1(\overline{\omega}) - \mathsf{i}_0(\overline{\omega}))^2 + (\mathsf{i}_2(\overline{\omega}) - \mathsf{i}_1(\overline{\omega}))^2 + \ldots + (\mathsf{i}_n(\overline{\omega}) - \mathsf{i}_{n-1}(\overline{\omega}))^2 < 7n$$
dla każdego $n \geqslant n_0$.
- Udowodnić, że $\mathbb{P}\Big(\mathsf{i}_k + \mathsf{i}_{k-2} > 2\mathsf{i}_{k-1} \text{ dla każdego } k \geqslant 2\Big) = 0$.

Geometria i algebra liniowa

Zadanie 4. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$, i niech $n = \dim V \geqslant 2$. *Klatkę Jordana* wymiaru $k \times k$ z parametrem $\lambda \in \mathbb{C}$ określamy jako

$$\mathbf{J}_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) Niech $\lambda \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, i niech $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ będzie macierzą blokową $\mathbf{A} = \mathbf{J}_{0,k} \oplus \mathbf{J}_{\lambda,n-k}$, tj.

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{J}_{0,k} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\lambda,n-k} \end{array}\right).$$

Wyznaczyć wartości:

- $\nu \coloneqq \max\{\dim\ker \mathbf{A}^m \colon m \in \mathbb{N}\}$,
- $\mu \coloneqq \min\{m \in \mathbb{N}\colon \dim\ker \mathbf{A}^m = \nu\}$.

(b) Załóżmy, że $T\colon V \to V$ jest liniowym endomorfizmem przestrzeni V spełniającym warunek

$$\ker T^{n-2} \neq \ker T^{n-1}. \qquad (\star)$$

Wykazać, że T ma co najwyżej dwie różne wartości własne.

(c) Pokazać, że jeżeli T spełnia $(\star)$ i T jest diagonalizowalny, to $n = 2$.

(d) Zakładając wciąż, że T spełnia $(\star)$, niech $S\colon V \to V$ będzie liniowym endomorfizmem takim, że operatory $T+S$ oraz $T-S$ komutują i są hermitowskie (samosprzężone). Dowieść, że $n = 2$.

Algebra

Zadanie 5. W każdym z poniższych poleceń (a)–(d) zakładamy, że G jest grupą skończoną nieparzystego rzędu $n = |G|$. Wiadomo (co nie jest trudne w dowodzie), że funkcja $G \ni x \mapsto x^2$ jest wówczas różnowartościowa i że warunek ten w istocie charakteryzuje skończone grupy nieparzystego rzędu.

(a) Pokazać, że dla każdego $x \in G$ istnieje liczba całkowita $k \geqslant 1$ taka, że $x^{2^k} = x$.

(b) Niech N będzie podgrupą normalną grupy G i niech $a, b \in G$. Wykazać, że jeżeli $a^2 b^{-2} \in N$, to $ab^{-1} \in N$.

(c) Wobec tezy (a) istnieje poprawnie określona funkcja $\ell\colon G \to \{1, \ldots, n\}$ taka, że $\ell(x)$ jest najmniejszą liczbą naturalną k, dla której $x^{2^k} = x$. Pokazać, że jeżeli ℓ jest różnowartościowa, a G zawiera co najmniej 3 elementy, to n jest podzielne przez 21.

(d) Niech $\mathbb{C}[G]$ oznacza pierścień grupowy grupy G nad ciałem liczb zespolonych, tj. pierścień złożony z wszystkich funkcji $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ z dodawaniem funkcji po współrzędnych, tzn. $(\phi + \psi)(s) = \phi(s) + \psi(s)$ dla $\phi, \psi \in \mathbb{C}[G]$, $s \in G$, oraz mnożeniem zdefiniowanym jako splot

$$(\phi \cdot \psi)(s) = \sum_{t \in G} \phi(t)\psi(t^{-1}s).$$

Zauważmy, że pierścień ten jest nieprzemienny, gdy G jest nieprzemienna, oraz że każdy element $\phi \in \mathbb{C}[G]$ można zapisać jako formalną kombinację $\phi = \sum_{s \in G} a_s s$, gdzie $a_s = \phi(s)$. Mnożenie dwóch takich kombinacji jest wówczas zwykłym mnożeniem „każdy z każdym”.

Załóżmy, że $g \in G$ jest elementem rzędu 3 i, używając powyższej konwencji, niech $\mathscr{I} \subseteq \mathbb{C}[G]$ będzie prawostronnym ideałem generowanym przez $\phi = 1 - g$, gdzie 1 jest elementem neutralnym grupy G. Zdefiniujmy także

$$\mathscr{M} = \Big\{ \sum_{s \in G} a_s s \in \mathbb{C}[G]\colon \sum_{s \in G} a_s = 0 \Big\}.$$

- Pokazać, że $1 - g$ jest dzielnikiem zera w pierścieniu $\mathbb{C}[G]$.
- Pokazać, że jeżeli $h \in G \setminus \{1, g, g^2\}$, to $1 - h \notin \mathscr{I}$.
- Udowodnić, że $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{M}$ oraz że $\mathscr{M}$ jest maksymalnym właściwym dwustronnym ideałem pierścienia $\mathbb{C}[G]$.
- Czy pierścień ilorazowy $\mathbb{C}[G]/\mathscr{M}$ jest przemienny?

Topologia

Zadanie 6. Rozważmy rodzinę $\mathcal{A}$ składającą się ze zbioru pustego oraz wszystkich ciągów arytmetycznych na $\mathbb{Z}$, tj. zbiorów postaci

$$S(a,b) = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\},$$

gdzie $a \neq 0$.

(a) Pokazać, że rodzina wszystkich sum elementów z $\mathcal{A}$ tworzy topologię $\mathcal{T}$ na $\mathbb{Z}$ z bazą $\mathcal{A}$.

(b) Sprawdzić, które z aksjomatów oddzielania: T_0, T_1 i T_2 są spełnione przez topologię $\mathcal{T}$.

(c) Wyznaczyć postać skończonych zbiorów otwartych w $\mathcal{T}$. Czy $\mathbb{Z}$ w tej topologii jest przestrzenią dyskretną?

(d) Pokazać, że zbiory z bazy $\mathcal{A}$ są otwarto-domknięte.

(e) Zbadać czy zbiór liczb, które nie są wielokrotnościami pewnej liczby pierwszej, tj. $\{-1, 1\}$, jest otwarty w $\mathcal{T}$. Stosując tezę (d), wywnioskować, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 7. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^{2/3} & \text{dla } x \leqslant 0 \\ 2\exp(-x^2) - 1 & \text{dla } 0 < x < 1 \\ \dfrac{\mathrm{e}-2}{3\mathrm{e}}(x^2 - 4) & \text{dla } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Rozważamy równanie różniczkowe

$$(\spadesuit) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x).$$

(a) Znaleźć wszystkie rozwiązania równania ($\spadesuit$) z warunkiem początkowym $x(0) = -1$, które są określone na pewnym otoczeniu punktu $t = 0$.

(b) Niech x_b będzie rozwiązaniem ($\spadesuit$) z warunkiem początkowym $x(0) = x_0 > -1$. W zależności od parametru x_0 wyznaczyć maksymalny przedział (ω_0, ω_+) istnienia rozwiązania x_b.

(c) Zbadać czy istnieje lewostronna granica

$$\lim_{t \to \omega_+^-} x(t),$$

a jeśli istnieje, wyznaczyć ją. (Odpowiedź może zależeć od parametru x_0.)

(d) Niech $g_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją spełniającą $g_0(t) = g_0(t+1)$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna stała $a \in \mathbb{R}$, taka że rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = g_0(t), \quad y(0) = a$$

jest funkcją okresową o okresie 1. Oznaczmy to rozwiązanie przez y^*.

(e) Udowodnić, że dla dowolnej funkcji ciągłej $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takiej że $|g(t) - g_0(t)| < e^{-t}$ dla wszystkich $t > 0$, każde rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = g(t), \quad y(0) = y_0$$

spełnia $\lim\limits_{t \to +\infty} (y(t) - y^*(t)) = 0$.

Analiza funkcjonalna

ZADANIE 8. Niech $L^2(\mathbb{R})$ oznacza klasyczną przestrzeń Hilberta (klas abstrakcji) funkcji mierzalnych $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dla których $\|f\|_2 := \{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\}^{1/2} < \infty$. Symbolem $C_0(\mathbb{R})$ oznaczmy przestrzeń Banacha ograniczonych funkcji ciągłych $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takich, że $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, wyposażoną w normę supremum $\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Ustalmy dowolnie $g \in L^2(\mathbb{R})$ i określmy operator liniowy na przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ wzorem

$$Tf(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{$\clubsuit$}$$

(a) Uzasadnić, że dla każdej $f \in L^2(\mathbb{R})$ zdefiniowana powyżej funkcja Tf należy do $C_0(\mathbb{R})$, a zatem wzór ($\clubsuit$) określa operator liniowy $T\colon L^2(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$. Wyznaczyć $\|T\|$.

(b) Niech $C[0,1]$ oznacza przestrzeń Banacha zespolonych funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$ wyposażoną w normę supremum. Rozważmy operator $S\colon C_0(\mathbb{R}) \to C[0,1]$ dany wzorem $Sf = f\restriction_{[0,1]}$. Wykazać, że złożenie $ST\colon L^2(\mathbb{R}) \to C[0,1]$ jest operatorem zwartym.

(c) Załóżmy teraz, że $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$. Rozważmy operator $\iota\colon C[0,1] \to L^2(\mathbb{R})$ dany wzorami $\iota f(t) = f(t)$ dla $t \in [0,1]$ oraz $\iota f(t) = 0$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ i określmy $U\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ wzorem $U = \iota ST$. Wykazać, że widmo tego operatora $\sigma(U) = \{0\}$.

(d) Zakładając ciągle, że $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$, wyznaczyć operator sprzężony U^* do operatora U oraz obliczyć normę $\|U^*U\|$.

Języki programowania

ZADANIE 9.

(a) Podaj wynik następującej funkcji `f` napisanej w języku C, wywołanej ze wskaźnikiem do tablicy `{0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}`:

```
int f(int *A) {
    int tmp = *A;
    tmp += tmp < 0 ? -tmp : f(++A);
    if (*(A++) >= 0) tmp += f(A);
    return tmp % 1000;
}
```

Napisz funkcję obliczającą to samo co `f`, ale bez użycia wywołań rekurencyjnych (i bez alokowania dodatkowych tablic).

(b) Napisz funkcje `f` i `g` w języku OCaml tak, aby wyrażenia

```
List.fold_right f [(1, 2); (3, 4); (5, 6)] ([], [])
List.fold_right f [('a', 'b')] ([], [])
List.map g [8; 9; 11; 12]
```

zwracały, odpowiednio,

```
([1; 3; 5], [2; 4; 6])
(['a'], ['b'])
[12; 11; 9; 8]
```

(c) Rozważmy następującą funkcję napisaną w języku C:

```
void f(char *S) {
    for (int a = 0; a < strlen(S); ++a)
        if (S[a] >= 'a' && S[a] <= 'z')
            S[a] = 'z' - (S[a] - 'a');
}
```

Funkcja ta jest niespodziewanie wolna: uruchomiona na przykładowym współczesnym komputerze działała około 14 sekund dla napisu długości 10^6. Z jakiego powodu? Jak poprawić tę funkcję?

(d) Rozważmy podobną funkcję napisaną w języku Java:

```
String f(String S) {
    String res = "";
    for (int a = 0; a < S.length(); ++a) {
        char ch = S.charAt(a);
        res += (ch >= 'a' && ch <= 'z') ? (char)('z' - (ch - 'a')) : ch;
    }
    return res;
}
```

Również ta funkcja jest bardzo wolna: działała około 57 sekund dla napisu długości 10^6. Z jakiego powodu? Jak poprawić tę funkcję?

Matematyka dyskretna

Zadanie 10. Dla danej dodatniej liczby całkowitej n, *permutacja* zbioru $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ to zmiana kolejności liczb $1, \ldots, n$, tj. bijekcja $\pi : [n] \to [n]$. Zatem $(3, 1, 2)$ jest permutacją zbioru $\{1, 2, 3\}$, gdzie $\pi(1) = 3, \pi(2) = 1, \pi(3) = 2$.

(a) Dla danych $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, ile jest permutacji π zbioru $[n]$ takich, że $\pi(j) < \pi(i) < \pi(k)$?

(b) Dla danego $j \in [n]$, ile jest permutacji π zbioru $[n]$ takich, że dla wszystkich $i \in [j]$ zachodzi $\pi(i) \leqslant \pi(j)$?

(c) Dla danych $j \in [n]$ oraz $i \in [j]$, ile jest permutacji π zbioru $[n]$, w których dokładnie i pozycji z $[j]$ jest odwzorowane na liczby nie większe niż $\pi(j)$?

(d) Dla danych liczb $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$, ile jest permutacji π zbioru $[n]$ takich, że dla wszystkich $k \in [r]$ i $j \in [i_k]$ zachodzi $\pi(j) \leqslant \pi(i_k)$?

Dla każdego z powyższych przypadków wyprowadź zwarty wzór (biorący pod uwagę podane wielkości).

Algorytmy i struktury danych

Zadanie 11. Dana jest tablica A długości n zawierająca liczby naturalne. Dla każdego z poniższych problemów zaproponuj algorytm działający w czasie liniowym i ze stałą dodatkową pamięcią. Bądź precyzyjny: napisz pseudokod i wyjaśnij nieoczywiste szczegóły; uzasadnij poprawność i złożoność.

(a) Znajdź trzy indeksy $i < j < k$ takie, że $A[i] < A[j] < A[k]$ (lub stwierdź, że nie istnieją).

(b) Oblicz liczbę par $i < j$ takich, że $A[i] < A[i+1] < \cdots < A[j]$.

(c) Mając daną liczbę naturalną d i zakładając, że tablica jest posortowana, znajdź największe k takie, że dla pewnego i zachodzi $A[k+i] - A[i] = d$ (lub stwierdź, że nie istnieje).

(d) Mając daną liczbę naturalną s znajdź największe k takie, że dla pewnego i zachodzi $A[i] + A[i+1] + \cdots + A[i+k] = s$ (lub stwierdź, że nie istnieje).

Logika i bazy danych

Zadanie 12. Rozważmy logikę pierwszego rzędu z równością i jednym binarnym symbolem relacyjnym $\leqslant$. Niech ψ_{lin} będzie zdaniem mówiącym, że $\leqslant$ jest porządkiem liniowym. Czy istnieje zdanie φ takie, że

(a) $\psi_{lin} \wedge \varphi$ ma modele, ale nie ma modeli skończonych;

(b) $\psi_{lin} \wedge \varphi$ ma dowolnie duże modele skończone, ale tylko o parzystych rozmiarach;

(c) wszystkie przeliczalne modele $\psi_{lin} \wedge \varphi$ są izomorficzne ze zbiorem liczb naturalnych;

(d) wszystkie przeliczalne modele $\psi_{lin} \wedge \varphi$ są izomorficzne ze zbiorem liczb wymiernych?

Dwa modele są izomorficzne, jeśli istnieje między nimi bijekcja f spełniająca $x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

Automaty i języki formalne

Zadanie 13. Dla ciągu zer i jedynek $w \in \{0,1\}^*$ niech $[w]_2$ oznacza jego wartość liczbową w systemie dwójkowym; np. $[011]_2 = 3$. Poniżej rozważymy alfabety $\{0,1\}^k$ (gdzie $k = 4$ w L_1; $k = 2$ w L_2 i w L_3; oraz $k = 3$ w L_4), z literami zapisanymi jako kolumny. Dla każdego z poniższych języków stwierdź (i udowodnij), czy jest on regularny i czy jest on bezkontekstowy.

$$L_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} : [a_1a_2\dots a_n]_2 + [b_1b_2\dots a_n]_2 = [c_1c_2\dots c_n]_2 + [d_1d_2\dots d_n]_2 \right\}$$

$$L_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} : \begin{array}{r} [a_1a_2\dots a_n]_2 + [b_1b_2\dots a_n]_2 = \\ [c_1c_2\dots c_n]_2 + [d_1d_2\dots d_n]_2 \end{array} \right\}$$

$$L_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} : \begin{array}{r} [a_1a_2\dots a_n]_2 + [b_1b_2\dots a_n]_2 = \\ [c_1c_2\dots c_n]_2 + [d_1d_2\dots d_n]_2 \end{array} \right\}$$

$$L_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} : [a_1a_2\dots a_n]_2 \cdot [b_1b_2\dots a_n]_2 = [c_1c_2\dots c_n]_2 \right\}$$

Teoria obliczeń i złożoność obliczeniowa

Zadanie 14. Określ złożoność każdego z poniższych problemów—wybierz spośród: w PTime, NP-zupełny, PSpace-zupełny, ExpTime-zupełny, ExpSpace-zupełny, nierozstrzygalny. Wszystkie stwierdzenia należy udowodnić.

(a) **Wejście:** Niedeterministyczna jednotaśmowa maszyna Turinga M.
Pytanie: Czy istnieje słowo wejściowe, na którym wszystkie biegi M zatrzymują się po co najwyżej 2023 krokach?

(b) **Wejście:** Deterministyczna jednotaśmowa maszyna Turinga M.
Pytanie: Czy istnieje słowo wejściowe w, na którym M zatrzymuje się po co najwyżej $\log_{2023}|w|$ krokach?

(c) **Wejście:** Deterministyczna jednotaśmowa maszyna Turinga M; liczba n (zapisana binarnie).
Pytanie: Czy istnieje słowo wejściowe o długości n, na którym M zatrzymuje się po co najwyżej $\log_{2023} n$ krokach?

(d) **Wejście:** Deterministyczna jednotaśmowa maszyna Turinga M; liczba n (zapisana binarnie).
Pytanie: Czy istnieje takie słowo wejściowe w, że (skończony lub nieskończony) bieg M na w ma następującą własność: dla każdego $k \in \mathbb{N}$, jeśli bieg ten odwiedza w pewnym momencie komórkę o numerze k, to później nigdy już nie odwiedza komórki o numerze $k - \lfloor \sqrt[2023]{n} \rfloor$?

Programowanie współbieżne i rozproszone, systemy komputerowe

Zadanie 15. *Fork-join* to model programowania współbieżnego z pamięcią dzieloną. Jako ilustrację rozważmy poniższy fragment kodu w języku C z rozszerzeniami do obsługi naszego modelu reprezentowanymi jako podkreślone słowa kluczowe:

```
1  int fibonacci(int i) {
2    if (i <= 1) {
3      return 1;
4    } else {
5      task t = fork fibonacci(i - 1);
6      int f2 = fibonacci(i - 2);
7      int f1 = join t;
8      return f1 + f2;
9    }
10 }
```

Instrukcja **fork** w linii 5 tworzy nowe (potomne) zadanie, **task**, które realizuje wywołanie funkcji `fibonacci(int)` z określoną wartością parametru `(i - 1)`. Po utworzeniu zadanie to jest wykonywane asynchronicznie — w zależności od dostępnych procesorów, może wykonywać się równolegle z (macierzystym) zadaniem, które je utworzyło, a w szczególności z rekurencyjnym wywołaniem `fibonacci(i - 2)` z linii 6 zadania macierzystego. Instrukcja **join** w linii 7 powoduje, że zadanie macierzyste czeka na zakończenie utworzonego przez siebie zadania potomnego (jeśli jeszcze ono się nie zakończyło) i pobiera jego wynik. W efekcie przedstawiona funkcja oblicza (w sposób naiwny) i-tą liczbę Fibonacciego, potencjalnie wykorzystując do tego wiele procesorów.

Generalnie model ten zakłada, że liczba utworzonych zadań istniejących w danej chwili może być nieograniczona. W szczególności, przed oczekiwaniem na zakończenie zadania potomnego, zadanie macierzyste może tworzyć kolejne zadania potomne. Jednak przed zakończeniem się, każde zadanie musi zaczekać na zakończenie się wszystkich utworzonych przez siebie zadań potomnych. Zarazem żadne zadanie nie może czekać za zakończenie się zadania, którego samo nie utworzyło. Jeśli dostępnych jest wystarczająco wiele procesorów, wszystkie utworzone zadania mogą być wykonywane równolegle; w przeciwnym przypadku niektóre z nich muszą czekać na wolny procesor. Szeregowanie zadań na procesorach jest transparentne dla programisty.

Poszczególne zadania mają dostęp do wspólnej pamięci (takiej jak zmienne globalne lub tablice przekazywane jako parametry funkcji). Takie dostępy są realizowane przez dwie atomowe operacje, odczyt i zapis, które działają tylko na wartościach typu **int**. Jeśli wiele zadań korzysta z tej samej lokalizacji pamięci (np. elementu tablicy) w tym samym czasie, operacje odczytu i zapisu są szeregowane w pewien arbitralny sposób. Dokładniej, podczas gdy wiele odczytów może odbywać się jednocześnie, zapisy wykluczają się wzajemnie (tzn. są w rzeczywistości wykonywane sekwencyjnie) oraz wykluczają się z odczytami. Kolejność takich wzajemnie wykluczających się operacji jest poza kontrolą programisty. Odczyt i zapis to jedyne obsługiwane operacje atomowe.

Twoim zadaniem jest napisanie wydajnej równoległej implementacji funkcji do obliczania sum prefiksowych w modelu fork-join. Dla danej n-elementowej tablicy wejściowej x o wartościach całkowitych, sumy prefiksowe tablicy x to n-elementowa tablica y taka, że:

$$y[i] = \begin{cases} x[0] & \text{jeśli } i = 0, \\ y[i-1] + x[i] & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dokładniej, musisz zaimplementować następującą funkcję:

```
void prefix_sums(int const * x, int * y, int n);
```

gdzie x to tablica wejściowa zawierająca liczby całkowite, y to tablica wynikowa, która po zakończeniu działania funkcji powinna zawierać sumy prefiksowe, a n to długość obu tablic. Należy przedstawić pełny kod swojego rozwiązania (sam opis zostanie oceniony bardzo nisko). W szczególności, jeśli używasz funkcji pomocniczych, musisz również je wszystkie zaimplementować. Dodaj komentarze dotyczące nietrywialnych aspektów Twojej implementacji. Oprócz implementacji musisz przedstawić także asymptotyczne ograniczenia na pracę (ang. *work*, to jest sumaryczną liczbę operacji wykonywanych przez wszystkie procesory) i długość ścieżki krytycznej (ang. *span*, to jest czas wykonania przy założeniu dowolnie dużej liczby procesorów). Należy podać nie tylko końcowe wzory, ale także ich wyprowadzenia. Jeśli Twoje rozwiązanie wykorzystuje dodatkowe tablice, możesz założyć, że asymptotyczny koszt alokowania niezainicjowanej tablicy lub jej zwolnienia wynosi $\Theta(1)$. Jeśli musisz wybierać pomiędzy minimalizacją pracy i długości ścieżki krytycznej, preferuj zmniejszenie tej drugiej wielkości.

Bioinformatyka

Zadanie 16.

(a) W wyniku sekwencjonowania DNA z wykorzystaniem technologii dającej krótkie odczyty uzyskano następujący zestaw odczytów: {ACGTGT, GTCATT, ATTACG, GTGTCA}. Odtwórz sekwencję wejściową *de novo*, posługując się grafem de Bruijna.

   (i) Zbuduj graf de Bruijna dla zadanych odczytów, przyjmując długość k-meru $k = 3$.

   (ii) Przeprowadź składanie (asemblację) wejściowej sekwencji, znajdując w zbudowanym grafie ścieżkę Eulera. Oznacz znalezioną ścieżkę na grafie, numerując kolejno tworzące ją krawędzie, i zapisz uzyskaną sekwencję.

(b) Jaka jest złożoność pamięciowa i czasowa budowy grafu de Bruijna zależnie od liczby odczytów (N), długości odczytów (n) i długości k-merów (k)?

(c) Wykorzystując ścieżkę Eulera zrekonstruuj sekwencję wejściową, wiedząc, że składa się ona z następujących 3-merów: {ACA, CAT, CAC, ACT, GCA, CTG, GGC}, przy czym jednego 3-meru z tej sekwencji brak w podanym zestawie. Zapisz wejściową sekwencję oraz brakujący 3-mer.