

PESEL: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

# UNIwersytet Warszawski

## Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

### Egzamin wstępny na studia 2 stopnia na kierunku INFORMATYKA

28 czerwca 2023 roku

*Czas rozwiązywania: 150 minut*

*W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami TAK albo NIE. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.*

#### Przykład poprawnego rozwiązania zadania

4. Każda liczba całkowita postaci  $10^n - 1$ , gdzie  $n$  jest całkowite i dodatnie,

TAK
-----

 (a) dzieli się przez 9;

NIE
-----

 (b) jest pierwsza;

TAK
-----

 (c) jest nieparzysta.

*Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa TAK oraz NIE. Pisać należy długopisem lub piórem.*

#### Zasady punktacji

*Kandydat zdobywa punkty „duże” (od 0 do 30) i punkty „małe” (od 0 do 90):*

- jeden punkt „duży” kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- jeden punkt „mały” kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 „małe” punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden „duży” punkt.*

*Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba*

$$W = \min(30, D + m/100),$$

*gdzie  $D$  oznacza liczbę „dużych”, a  $m$  liczbę „małych” punktów. Na przykład 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.*

*Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty „duże”. Punkty „małe” zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo „dużych” punktów.*

*Powodzenia!*

1. Niech  $a_n = n^n$ ,  $b_n = n!$ ,  $c_n = 2^n$  i  $d_n = n^2$  dla  $n$  naturalnych. Wynika z tego, że granicę równą zero ma ciąg

(a)  $b_n/a_n$ ;

(b)  $d_n/c_n$ ;

(c)  $(d_n \ln c_n)/\ln b_n$ .

2. Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła. Wynika z tego, że

(a) jeśli zbiór wartości  $f$  jest skończony, to jest jednoelementowy;

(b)  $f$  ma funkcję pierwotną;

(c) jeśli  $f$  jest różnowartościowa, to jest monotoniczna.

3. Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x, y) = x^2 + 7xy + 2y^2$  ma w punkcie  $(0, 0)$

(a) pochodne cząstkowe  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ ;

(b) minimum lokalne właściwe;

(c) maksimum lokalne właściwe.

4. Liczba zespolona  $x_0$  jest rozwiązaniem równania  $x^2 + x + 1 = 0$ . Wynika z tego, że

(a) liczba  $x_0^2$  też jest rozwiązaniem tego równania;

(b) liczba  $\frac{1}{x_0}$  też jest rozwiązaniem tego równania;

(c)  $x_0^3 = 1$ .

5. Niech  $A \in \mathbb{C}^{2n, 2n}$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$  oraz  $n > 0$ , będzie macierzą nieosobliwą. Wynika z tego, że

(a) liczba różnych wartości własnych macierzy  $A$  jest parzysta;

(b) w zbiorze wartości własnych macierzy  $A$  nie ma zera;

(c) jeśli  $\lambda$  jest wartością własną macierzy  $A^{-1}$ , to  $\lambda^{-1}$  jest wartością własną macierzy  $A$ .

6. Niech  $\sim$  będzie relacją równoważności w zbiorze  $A$  i niech  $a, b, c$  będą różnymi elementami zbioru  $A$ . Wynika z tego, że

(a) jeśli  $a \sim c$  i  $b \sim c$ , to klasa abstrakcji  $a$  i klasa abstrakcji  $b$  są równe;

(b) jeśli dla każdego elementu  $x$  zbioru  $A$  zachodzi  $a \sim x$  lub  $b \sim x$ , to relacja  $\sim$  ma dokładnie dwie klasy abstrakcji;

(c) jeśli relacja  $\sim$  ma dokładnie dwie klasy abstrakcji, to dla każdego elementu  $x$  zbioru  $A$  zachodzi  $a \sim x$  lub  $b \sim x$ .

7. Porządek leksykograficzny jest dobrym uporządkowaniem zbioru

(a)  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ;

(b)  $\{0, 1, 2\}^*$ ;

(c)  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ .

8. Liczba par  $(A, B)$ , takich że  $A, B \subseteq \{1, \dots, 2023\}$  oraz
- (a)  $A \subseteq B$ , jest równa  $3^{2023}$ ;
  - (b)  $A \cap B = \emptyset$ , jest równa  $3^{2023}$ ;
  - (c)  $|A \cup B|$  jest liczbą parzystą, jest równa  $3^{2023}$ .
9.  $G$  jest  $n$ -wierzchołkowym grafem spójnym regularnym stopnia 3. Wynika z tego, że
- (a)  $n$  jest parzyste;
  - (b)  $G$  jest planarny;
  - (c) liczba chromatyczna  $\chi(G) \leq 4$ .
10. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Wynika z tego, że
- (a) prawdopodobieństwo, że wyrzucimy dokładnie 2 orły, jest równe  $45/1024$ ;
  - (b) prawdopodobieństwo, że wyrzucimy orła w ostatnim rzucie pod warunkiem, że we wszystkich 10 rzutach wyrzucimy dokładnie 1 orła, jest równe  $1/2$ ;
  - (c) prawdopodobieństwo, że wyrzucimy orła w ostatnim rzucie pod warunkiem, że w pierwszych 9 rzutach wyrzucimy dokładnie 6 orłów, jest równe  $1/2$ .
11. Niech  $X$  i  $Y$  będą dwiema niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 4. Wynika z tego, że
- (a)  $X - Y$  ma taki sam rozkład jak  $X + Y$ ;
  - (b) odchylenie standardowe zmiennej losowej  $X - Y$  jest równe 4;
  - (c) dla  $a, b > 0$  zmienna losowa  $aX + bY$  ma rozkład normalny.
12. Niech  $p(x)$  będzie wielomianem stopnia co najwyżej 6 interpolującym w punktach  $x_k = k$  wartości  $f(x_k) = k^2$ , gdzie  $k = 0, \dots, 6$ . Wynika z tego, że
- (a)  $p(0) = 0$ ;
  - (b)  $p(-1) = 1$ ;
  - (c) jeśli  $p(x) = \sum_{i=0}^6 a_i x^i$ , to  $|a_5| \leq 1$ .
13. Co najmniej 8 porównań w pesymistycznym przypadku wymaga algorytm sortujący
- (a) 8 różnych elementów tworzących dwa posortowane ciągi czteroelementowe;
  - (b) 7 różnych elementów;
  - (c) 6 różnych elementów  $a, b, c, d, e, f$ , jeśli wiadomo, że  $a < b$  i  $c < d$ .
14. Do kolejki priorytetowej  $Q$  typu min wstawiamy  $n$  elementów, a następnie wykonujemy ciąg operacji DelMin i DecreaseKey, w którym jest łącznie  $n$  operacji DelMin i  $n \lceil \sqrt{\lg n} \rceil$  operacji DecreaseKey. Łączny koszt tego ciągu operacji to  $O(n \lg n)$ , jeśli  $Q$  jest
- (a) kopcem binarnym;
  - (b) kopcem Fibonacciego;
  - (c) kolejką dwumianową.

15. Niech język  $K$  będzie regularny, a język  $L$  bezkontekstowy. Wynika z tego, że bezkontekstowy jest język

- (a)  $K \setminus L$ ;  
 (b)  $K \cup L$ ;  
 (c)  $LK^*L$ .

16. Niech  $L$  będzie dowolnym językiem nad alfabetem  $\{a, b\}$ . Rozważmy język  $K = \{a^n \cdot w \cdot a^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in L\}$ . Wynika z tego, że

- (a) język  $K$  jest regularny;  
 (b) język  $K$  jest nieregularny;  
 (c) język  $\{u \in \{a\}^* \mid \exists u' \in K \mid |u| = |u'|\}$  jest regularny.

17. Niech  $Ide$  będzie zbiorem identyfikatorów zmiennych, a  $Loc = \{l_0, l_1, \dots\}$  będzie przeliczalnym zbiorem lokacji o zadanej numeracji. Niech  $Env = Ide \rightarrow Loc$ ,  $Store = Loc \rightarrow \mathbb{N}$ , a  $State = Env \times Store \times \mathbb{N}$ . Wartością zmiennej  $x \in Ide$  w stanie  $(\varrho, s, n) \in State$  nazywamy liczbę  $s(\varrho x) \in \mathbb{N}$ . Znaczenie programów definiuje funkcja semantyczna  $\mathcal{P}: Prog \rightarrow State \rightarrow State$  dana następującymi klauzulami semantycznymi:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[\text{start } x](\varrho, s, n) &= (\varrho[x \mapsto l_n], s[l_n \mapsto 0], n + 1) \\ \mathcal{P}[\text{inc } x](\varrho, s, n) &= (\varrho, s[(\varrho x) \mapsto (s(\varrho x) + 1)], n) \\ \mathcal{P}[\text{sum}(x, y)](\varrho, s, n) &= (\varrho[y \mapsto l_n, x \mapsto l_n], s[l_n \mapsto (s(\varrho x) + s(\varrho y))], n + 1) \\ \mathcal{P}[p_1; p_2](\varrho, s, n) &= \mathcal{P}[p_2](\mathcal{P}[p_1](\varrho, s, n)) \end{aligned}$$

Po wykonaniu programu

```
start x; inc x; start y; inc y; sum(x, y); inc x
```

- (a) suma wartości zmiennych  $x$  i  $y$  wynosi 3;  
 (b) suma wartości zmiennych  $x$  i  $y$  wynosi 6;  
 (c) zmienne  $x$  i  $y$  mają tę samą wartość.

18. Dany jest plik zawierający następujący kod w Javie:

```
class A /* extends B */ {
    A() {
        super(2023);
    }
}

class B /* extends A */ {
    B(int a) {
        super();
    }
}
```

- (a) Po odkomentowaniu deklaracji `extends B` kompilacja tego pliku powiedzie się.  
 (b) Po odkomentowaniu deklaracji `extends A` kompilacja tego pliku powiedzie się.  
 (c) Po odkomentowaniu deklaracji `extends A` oraz `extends B` kompilacja tego pliku powiedzie się.

19. Dany jest plik Main.java zawierający następujący program w Javie:

```
class A {
    int f() {
        return 1;
    }

    int g() {
        return this.f() + 1;
    }
}

class B extends A {
    int f() {
        return 10;
    }

    int g() {
        return super.g() + 1;
    }

    int h() {
        return this.g() + 1;
    }
}

public class Main {
    public static void main(String [] args) {
        System.out.println(new A().g()); // punkt (a)
        System.out.println(new B().g()); // punkt (b)
        System.out.println(new B().h()); // punkt (c)
    }
}
```

- (a) Obliczenie wyrażenia `new A().g()` daje wartość 2.
- (b) Obliczenie wyrażenia `new B().g()` daje wartość 3.
- (c) Obliczenie wyrażenia `new B().h()` daje wartość 4.

20. Numer portu TCP lub UDP

- (a) pozwala zidentyfikować systemowi proces biorący udział w komunikacji;
- (b) jest liczbą całkowitą z przedziału od 0 do 32767;
- (c) określa abstrakcyjny punkt końcowy komunikacji odpowiednio TCP lub UDP.

21. Zgodnie z tablicą tras

Cel	Maska	Brama	Interfejs
0.0.0.0	0.0.0.0	193.0.96.31	eth0
10.0.0.0	255.0.0.0	10.1.0.1	eth1
10.1.0.0	255.255.240.0	0.0.0.0	eth1
193.0.96.0	255.255.255.0	0.0.0.0	eth0

- (a) pakiet o docelowym adresie IP 193.0.42.42 zostanie skierowany bezpośrednio do odbiorcy w sieci 193.0.96.0 bez pośrednictwa bramy;
- (b) pakiet o docelowym adresie IP 10.1.1.42 zostanie skierowany do bramy 10.1.0.1;
- (c) pakiet o docelowym adresie IP 127.0.0.1 zostanie skierowany do bramy 193.0.96.31.

22. Szyfrowanie Rivesta-Shamira-Adlemana (RSA) jest przykładem

- (a) kryptografii z kluczem publicznym i prywatnym;  
 (b) kryptografii z kluczem symetrycznym;  
 (c) kryptografii, dla której jest znany wydajny kwantowy algorytm łamiący.

23. Rozważmy tabele  $R(A, B)$ ,  $S(B, C)$ ,  $T(C, A)$ , przy czym w tabeli  $R$  kluczem jest para kolumn  $A$  i  $B$ , w tabeli  $S$  para kolumn  $B$  i  $C$ , a w tabeli  $T$  kolumna  $C$ . Optymalną kolejnością wyliczenia złączenia naturalnego tych trzech tabel jest

- (a)  $(R \bowtie S) \bowtie T$ ;  
 (b)  $(S \bowtie T) \bowtie R$ ;  
 (c)  $(T \bowtie R) \bowtie S$ .

24. Niech  $R$  będzie tabelą o dwóch kolumnach  $X$  i  $Y$  oraz 0 wierszach. Rozważmy dwie instrukcje:

A `INSERT INTO R VALUES ('a', 'b');`      B `DELETE FROM R WHERE X = 'a';`

- (a) Dwukrotne wykonanie instrukcji A daje taki sam wynik jak jej jednokrotne wykonanie.  
 (b) Jeśli kolumna  $X$  jest kluczem głównym, to dwukrotne wykonanie instrukcji A skutkuje błędem.  
 (c) Wykonanie instrukcji B skutkuje błędem.

25. Rozważmy następujący program wykonywany przez trzy procesy:

```
int x = 0;

process P(int id) { // id = 0, 1, 2
    int y;
    for (i = 0; i < 5; i++) {
        y = x;
        y = y + 1;
        x = y;
    }
}
```

Istnieje taki przeplot, że wartość zmiennej  $x$  po zakończeniu wszystkich trzech procesów jest równa

- (a) 15;  
 (b) 3;  
 (c) 2.

26. W systemie rozproszonym działa  $N$  procesów, które mogą komunikować się parami, każdy z każdym. Jeden z procesów chce rozgłosić pewną informację wszystkim pozostałym procesom. Informacja jest na tyle krótka, że mieści się w jednym komunikacie. Przyjmijmy, że przesłanie pojedynczego komunikatu pomiędzy dwoma procesami zajmuje jedną jednostkę czasu. Istnieje schemat komunikacji między  $N$  procesami, w którym rozgłoszenie informacji do wszystkich procesów

- (a) trwa  $O(N)$  jednostek czasu;
- (b) trwa  $O(\log N)$  jednostek czasu;
- (c) wymaga rozesłania łącznie  $O(\log N)$  komunikatów.

27. W pewnym procesorze zastosowano stronicowanie dwupoziomowe z 54-bitowymi adresami wirtualnymi. Rozmiar strony, tablicy stron i katalogu tablic stron wynosi 1 MiB. Rozmiar jednego wpisu w tablicy stron i katalogu tablic stron wynosi 8 B. Adres wirtualny zawiera

- (a) przesunięcie mające 20 bitów;
- (b) numer strony mający 18 bitów;
- (c) numer katalogu stron mający 16 bitów.

28. Przypuśćmy, że w systemie Linux plik opisywany przez i-węzeł  $w$  został poprawnie otwarty przez dwa różne procesy  $P$  i  $Q$  za pomocą funkcji systemowej `open`. Wynika z tego, że

- (a) w pamięci operacyjnej znajdują się co najmniej dwie kopie i-węzła  $w$ ;
- (b) procesy  $P$  i  $Q$  współdziela bieżącą pozycję pliku;
- (c) wynikiem funkcji systemowej `open` w obu procesach był ten sam deskryptor.

29. W języku HTML można określić, że wskazany w pewnym miejscu strony skrypt

- (a) jest ładowany i wykonywany przed dalszym parsowaniem kodu HTML;
- (b) jest ładowany równoległe do parsowania dalszego kodu HTML i zostanie wykonany, gdy tylko będzie dostępny;
- (c) jest ładowany równoległe do parsowania kodu HTML i zostanie wykonany po zakończeniu parsowania.

30. Załóżmy, że w dokumencie HTML został użyty jeden plik z arkuszem stylu CSS o treści:

```
.lawn a:hover {
    background-color: lightgreen;
}
```

Wtedy

- (a) najechanie na dowolny link w dokumencie spowoduje wyświetlenie tła linku w kolorze `hover`;
- (b) najechanie na dowolny link w dokumencie spowoduje wyświetlenie tła linku w kolorze `lightgreen`;
- (c) w dokumencie tło dowolnego linku wewnątrz pudełek o klasie `hover` wyświetlane będzie w kolorze `lightgreen`.