

PESEL:

UNIwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki

Egzamin wstępny na studia 2 stopnia
na kierunku INFORMATYKA

18 września 2023 roku

Czas rozwiązywania: 150 minut

W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami TAK albo NIE. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.

Przykład poprawnego rozwiązania zadania

4. Każda liczba całkowita postaci $10^n - 1$, gdzie n jest całkowite i dodatnie,

TAK (a) dzieli się przez 9;

NIE (b) jest pierwsza;

TAK (c) jest nieparzysta.

Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa TAK oraz NIE. Pisać należy długopisem lub piórem.

Zasady punktacji

Kandydat zdobywa punkty „duże” (od 0 do 30) i punkty „małe” (od 0 do 90):

- *jeden punkt „duży” kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- *jeden punkt „mały” kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 „małe” punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden „duży” punkt.*

Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba

$$W = \min(30, D + m/100),$$

gdzie D oznacza liczbę „dużych”, a m liczbę „małych” punktów. Na przykład 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.

Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty „duże”. Punkty „małe” zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo „dużych” punktów.

Powodzenia!

1. Ciąg $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych ma granicę równą 2023. Wynika z tego, że

- (a) wszystkie liczby a_n są wymierne;
 (b) ciąg $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ zawiera nieskończony podciąg rosnący;
 (c) ciąg $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

2. Równanie $2^{-x} = 2x$ ma w \mathbb{R}

- (a) 0 rozwiązań;
 (b) 1 rozwiązanie;
 (c) 2 rozwiązania.

3. Objętość zbioru $\{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq (1 - x^2 - y^2)^{1/2}\} \subset \mathbb{R}^3$ jest

- (a) liczbą wymierną;
 (b) liczbą mniejszą od 3;
 (c) liczbą większą od 2.

4. Macierz rzeczywista A o wymiarach $n \times n$, gdzie $n > 0$, jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy

- (a) $\ker(A \cdot A^T) = \{0\}$;
 (b) $\text{im}(A \cdot A^T) = \mathbb{R}^n$;
 (c) 0 jest wartością własną macierzy A .

5. Niech $M = \{(a_{ij})_{i,j=1}^3 \in \mathbb{R}^{3,3} \mid a_{11} + 2a_{22} + 3a_{33} = 0\}$. Wynika z tego, że

- (a) zbiór M jest zamknięty na działanie mnożenia macierzy;
 (b) zbiór M jest podprzestrzenią w $\mathbb{R}^{3,3}$ o wymiarze co najmniej 9;
 (c) istnieje taka podprzestrzeń liniowa N przestrzeni $\mathbb{R}^{3,3}$, że $M \oplus N = \mathbb{R}^{3,3}$.

6. Niech $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq n^2\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wynika z tego, że

- (a) rodzina $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest łańcuchem zbiorów;
 (b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$;
 (c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$.

7. W zbiorze \mathbb{N} istnieje porządek częściowy, który

- (a) ma nieprzeliczalnie wiele różnych łańcuchów;
 (b) ma nieprzeliczalnie wiele różnych antyłańcuchów;
 (c) ma nieprzeliczalnie wiele różnych łańcuchów i nieprzeliczalnie wiele różnych antyłańcuchów.

8. Liczba par (A, k) , takich że $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $n > 1$ oraz

- (a) $k \notin A$, jest równa $n2^{n-1}$;
 (b) $|A|$ jest liczbą parzystą, jest równa $n2^{n-1}$;
 (c) $|A \cup \{k\}|$ jest liczbą parzystą, jest równa $n2^{n-1}$.

9. Dla dodatnich liczb całkowitych m, n niech $d = \text{NWD}(m, n)$ oraz $s = \text{NWW}(m, n)$. Wynika z tego, że
- (a) $s \cdot d = m \cdot n$;
- (b) jeśli $m \neq n$, to $s/d \geq \max(m, n)$;
- (c) n/d i m są względnie pierwsze.
10. Niech X będzie zmienną losową, taką że $E(X)$ i $\text{Var}(X)$ są skończone. Wynika z tego, że
- (a) $\text{Var}(2X) = 2\text{Var}(X)$;
- (b) $E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$;
- (c) $\text{Var}(X) > EX$.
11. Załóżmy, że $P(A_1) = 0,6$; $P(A_2) = 0,8$; $P(B|A_1) = 0,02$; $P(B|A_2) = 0,03$. Wynika z tego, że
- (a) $P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)}$;
- (b) $P(B \cap A_1) = 0,012$;
- (c) $P(B) \leq 0,03$.
12. Dla zadanych $a, b, c \in \mathbb{R}$ rozważmy macierz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Wynika z tego, że
- (a) jeśli $a \neq 0$, to macierz A ma rozkład Cholesky'ego;
- (b) jeśli $b = 0 \neq c$, to wskaźnik uwarunkowania macierzy A , liczony w normie $\|\cdot\|_2$, jest równy $|a|/|c|$;
- (c) jeśli $b \neq 0$, to rozkład QR macierzy A da się wyznaczyć za pomocą co najwyżej dwóch operacji zmiennoprzecinkowych.
13. Algorytm Insertion Sort w standardowej implementacji
- (a) jest algorytmem stabilnym;
- (b) jest algorytmem sortującym w miejscu;
- (c) sortuje n różnych liczb w przypadku pesymistycznym w czasie $O(n \log n)$.
14. Niech T będzie drzewem AVL o $n > 2023$ węzłach i niech n_L i n_P oznaczają liczbę węzłów w, odpowiednio, lewym i prawym poddrzewie korzenia. Wynika z tego, że
- (a) $n/n_L < 3$;
- (b) $\min(n_L/n_P, n_P/n_L) < 2/3$;
- (c) $|n_L - n_P| < 100$.

15. Niech L będzie nieskończonym językiem bezkontekstowym. Wynika z tego, że
- (a) język L zawiera jakieś słowo postaci $u \cdot w^2 \cdot u'$ dla pewnych słów u, w, u' , takich że $|w| \geq 2023$;
- (b) język L zawiera jakieś słowo postaci $u \cdot w_1^2 \cdot v \cdot w_2^2 \cdot u'$ dla pewnych słów u, w_1, v, w_2, u' , takich że $|w_1| \geq 2023$ i $|w_2| \geq 2023$;
- (c) język L zawiera jakieś słowo postaci $u \cdot w^2 \cdot v \cdot w^2 \cdot u'$ dla pewnych słów u, w, v, u' , takich że $|w| \geq 2023$.

16. Załóżmy, że niedeterministyczny automat skończony \mathcal{A} nad alfabetem $\{a, b\}$ ma dokładnie 100 stanów. Wynika z tego, że

- (a) $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{A} akceptuje jakieś słowo długości nie większej niż 100;
- (b) $L(\mathcal{A}) \neq \{a, b\}^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{A} odrzuca jakieś słowo długości nie większej niż 100;
- (c) $L(\mathcal{A})$ jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{A} akceptuje jakieś słowo długości większej niż 100.

17. Niech Ide będzie zbiorem identyfikatorów zmiennych, a $Loc = \{l_0, l_1, \dots\}$ będzie przeliczalnym zbiorem lokacji o zadanej numeracji. Niech $Env = Ide \rightarrow Loc$, $Store = Loc \rightarrow \mathbb{N}$, a $State = Env \times Store \times \mathbb{N}$. Wartością zmiennej $x \in Ide$ w stanie $(\rho, s, n) \in State$ nazywamy liczbę $s(\rho x) \in \mathbb{N}$. Znaczenie programów definiuje funkcja semantyczna $\mathcal{P}: Prog \rightarrow State \rightarrow State$ dana następującymi klauzulami semantycznymi:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[\text{new } x](\rho, s, n) &= (\rho[x \mapsto l_n], s[l_n \mapsto 0], n + 1) \\ \mathcal{P}[\text{inc } x](\rho, s, n) &= (\rho, s[(\rho x) \mapsto (s(\rho x) + 1)], n) \\ \mathcal{P}[\text{swinc}(x, y)](\rho, s, n) &= (\rho[x \mapsto (\rho y), y \mapsto (\rho x)], s[(\rho y) \mapsto s(\rho y) + 1], n) \\ \mathcal{P}[p_1; p_2](\rho, s, n) &= \mathcal{P}[p_2](\mathcal{P}[p_1](\rho, s, n)) \end{aligned}$$

Po wykonaniu programu

```
new x; inc x; new y; swinc(x, y); inc y
```

- (a) zmienne x i y mają tę samą wartość;
- (b) zmienna x ma wartość 1, a zmienna y ma wartość 2;
- (c) zmienna x ma wartość 2, a zmienna y ma wartość 1.

18. Dany jest plik A.java zawierający deklarację klasy w Javie:

```
1 public class A {
2     A() {
3         this(1);           // punkt (a)
4     }
5     A(int x) {this();}     // punkt (b)
6     A(double x) {}        // punkt (c)
7 }
```

- (a) Po zakomentowaniu wiersza 3 kompilacja tego pliku powiedzie się.
- (b) Po zakomentowaniu wiersza 5 kompilacja tego pliku powiedzie się.
- (c) Po zakomentowaniu wiersza 6 kompilacja tego pliku powiedzie się.

19. Dany jest plik A.java zawierający następujący program w Javie:

```
1 public class A {
2     int x;
3     Integer y;
4     public static void main(String [] args) {
5         // System.out.println(new A().x.equals(new A().y));
6         // System.out.println(new A().x == new A().y);
7         // System.out.println(new A().y.equals(new A().y));
8     }
9 }
```

- (a) Po odkomentowaniu wiersza 5 kompilacja tego pliku powiedzie się.
- (b) Po odkomentowaniu wiersza 6 kompilacja tego pliku powiedzie się.
- (c) Po odkomentowaniu wiersza 7 kompilacja tego pliku powiedzie się i program wypisze wartość true.

20. W protokołach internetowych

- (a) mechanizm CRC (ang. *Cyclic Redundancy Check*) stosuje się w warstwie łącza;
- (b) kontrolę przepływu stosuje się w warstwie sieci;
- (c) kontrolę przeciążenia stosuje się w warstwie transportowej.

21. Tablica tras

Cel	Maska	Brama	Interfejs
0.0.0.0	0.0.0.0	x	eth0
10.0.0.0	y	10.1.0.1	eth1
10.1.0.0	255.255.240.0	0.0.0.0	eth1
193.0.96.0	255.255.255.0	0.0.0.0	eth0

jest poprawna, jeśli

- (a) w miejsce x wpiszemy 0.0.0.0, a w miejsce y wpiszemy 255.255.255.0;
- (b) w miejsce x wpiszemy 12.0.0.1, a w miejsce y wpiszemy 255.255.248.0;
- (c) w miejsce x wpiszemy 10.10.0.1, a w miejsce y wpiszemy 255.255.240.0.

22. Następujący problem uważany jest za trudny obliczeniowo:

- (a) problem znajdowania odwrotności liczby całkowitej modulo liczba pierwsza;
- (b) problem faktoryzacji liczby całkowitej;
- (c) problem logarytmu dyskretnego modulo liczba pierwsza.

23. W tabeli Prac(id, nazwisko, id_szefa) kolumna id jest kluczem głównym, natomiast kolumna id_szefa jest kluczem obcym do tej samej tabeli wskazującym bezpośredniego przełożonego pracownika. Następujące zapytanie wypisuje dla każdego pracownika liczbę jego bezpośrednich podwładnych:

- (a) `SELECT B.id, count(A.id)`
`FROM Prac A LEFT JOIN Prac B ON A.id_szefa = B.id`
`GROUP BY B.id`
- (b) `SELECT B.id, count(A.id)`
`FROM Prac A JOIN Prac B ON A.id_szefa = B.id`
`GROUP BY B.id`
- (c) `SELECT B.id, count(A.id)`
`FROM Prac A RIGHT JOIN Prac B ON A.id_szefa = B.id`
`GROUP BY B.id`

24. Przypuśćmy, że w tabeli R o kolumnach A, B, C kolumna A jest kluczem. Załóżmy, że w tabeli R nie występują wartości null, w kolumnie A znajduje się dokładnie a różnych wartości, w kolumnie B dokładnie b różnych wartości, a w kolumnie C dokładnie c różnych wartości. Wynika z tego, że

- (a) $a \leq b$;
- (b) $a \leq b \cdot c$;
- (c) $a \geq \max(b, c)$.

25. Program współbieżny złożony z dwóch procesów T o poniższej definicji, synchronizowanych za pomocą semafora silnie uczciwego wykonuje się w systemie z arbitrem pamięci.

```
int x = 0; int y = 0;
semaphore sem = 1;

process T {
  for (int i = 0; i < 5; i++) {
    x = x + 1;
    P(sem);
    y = y + 1;
    V(sem);
  }
}
```

- (a) W każdym wykonaniu tego programu oba procesy zakończą się.
- (b) Istnieje wykonanie, w którym oba procesy zakończą się i po ich zakończeniu $x < y$.
- (c) Istnieje wykonanie, w którym oba procesy zakończą się i po ich zakończeniu $y < x$.

26. W systemie z pamięcią wirtualną zadaniem systemu operacyjnego jest

- (a) obsługa błędu braku strony;
- (b) zainicjowanie transferu brakującej strony z pamięci pomocniczej;
- (c) wskazanie procesorowi (w sposób zależny od konkretnej architektury) położenia tablicy stron aktywnego procesu.

27. Monitor z klasyczną semantyką Hoare'a udostępnia dwie funkcje:

```
void magic() {  
    if (empty(c))  
        wait(c);  
    x++;  
    signal(c);  
    printf("%d\n", x);  
}
```

```
int get() {  
    return x;  
}
```

Zmienna x typu int jest zainicjowaną na 2 zmienną lokalną monitora, a c jest zmienną warunkową.

- (a) Wynikiem funkcji `get` jest zawsze liczba parzysta.
- (b) Zmienna x przyjmuje wyłącznie wartości parzyste.
- (c) Wszystkie liczby wypisane przez funkcję `printf` są parzyste.

28. W systemie operacyjnym z szeregowaniem procesów z wywłaszczaniem proces może być wywłaszczony, gdy

- (a) proces ten całkowicie wykorzystał przydzielony mu kwant czasu;
- (b) proces ten zażądał wykonania operacji wejścia-wyjścia;
- (c) pojawił się inny proces gotowy do wykonania o wyższym priorytecie niż ten proces.

29. Załóżmy, że w dokumencie HTML jedynym opisem stylu jest plik CSS o treści:

```
p:lang(pl) {  
    background-color: darkgreen;  
}
```

Spowoduje to wyświetlanie tła wszystkich akapitów tego dokumentu ujętych w znaczniki `<p>` i `</p>`

- (a) w kolorze `darkgreen`;
- (b) w kolorze `darkgreen`, jeśli we wszystkich znacznikach `<p>` dokumentu HTML pojawi się określenie atrybutu `lang="pl"`;
- (c) w kolorze `darkgreen`, jeśli w znaczniku `<body>` dokumentu HTML pojawi się określenie atrybutu `lang="pl"`.

30. W języku JavaScript `var x = -5` oznacza deklarację zmiennej, której wartość

- (a) tuż po tej deklaracji jest reprezentowana jako 64-bitowa liczba całkowita w kodzie uzupełnieniowym do dwójki;
- (b) tuż po tej deklaracji jest reprezentowana jako 64-bitowa liczba zmiennoprzecinkowa według standardu IEEE 754;
- (c) użyta tuż po tej deklaracji w wyrażeniu `0 - x` spowoduje powstanie wartości reprezentowanej jako 64-bitowa liczba całkowita bez znaku.