Zadania ze wstępu do teorii mnogości[1]

Zadania na rozgrzewkę

1. Zaznacz na rysunku zbiory:
   - $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : (x \cdot x + y \cdot y > 1) \to (y + x > 0)\}$;
   - $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \forall x (x + y < 0) \to (y + x < 0)\}$.
2. Zaznacz na rysunku zbiory:
   - $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : (x \cdot x < 0) \to (x \cdot x > 0)\}$;
   - $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : (x > y) \to (y + x > 0)\}$.
3. Zaznacz na rysunku zbiory:
   - $\{x \in \mathbb{R} : \exists y \forall z (y - z \leq x \wedge x \leq y + \frac{1}{2} \wedge y \geq 1 \wedge x \geq 0)\}$;
   - $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \to \exists z (x^2 + (y - z)^2 \leq \frac{1}{4})\}$;
   - $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \forall z (y^2 + (x - z)^2 \neq 1) \to \exists z ((x - z)^2 + (y - z^2)^2 = 1)\}$.

Rachunek zbiorów

4. Wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ i $B - A$ dla $A = \{\{a, \{a\}\}, a\}$ i $B = \{a, \{a\}\}$.

5.* Skąd wiadomo, że dla dowolnych zbiorów a, b, c, istnieje zbiór $\{a, b, c\}$?

6. Pokazać, że:
   (a) jeśli $A - B = B - A$ to $A = B$;
   (b) jeśli $A \cup B = C$ to $C - B = A - B$;
   (c) jeśli $A \cup B \subseteq A \cap B$ to $A = B$.
7. Niech $C \subseteq X$. Udowodnić równoważność $A \cap C \subseteq B \;\leftrightarrow\; C \subseteq (X - A) \cup B$.
8. Zbadać, czy dla dowolnych A i B zachodzi
   (a) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$;
   (b) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$;
   (c) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$;
   (d) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$.
9. Pokazać, że $A \subseteq B$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $P(A) \subseteq P(B)$.
10. Czy jeśli $A \subseteq B$ to $\bigcup A \subseteq \bigcup B$? Czy jeśli $A \subseteq B$ to $\bigcap B \subseteq \bigcap A$?
11. Pokazać, że $\bigcup P(A) = A$, dla dowolnego A.

[1] Zadania są zebrane przypadkowo, nie sprawdzone i bez jakiejkolwiek gwarancji poprawności. Korzystać można na własne ryzyko i odpowiedzialność. Zadania pochodzą od różnych autorów, autorstwo większości z nich jest trudne do ustalenia. Za wykrycie błędu dziękuję panu Kamilowi Herbie.

12. Udowodnić, że dla dowolnego X zachodzi równoważność:
$$X \subseteq P(X) \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad \bigcup X \subseteq X.$$

13. Niech $\mathcal{A} \subseteq P(\mathbb{R})$, będzie rodziną zbiorów spełniającą warunek
$$(\forall B \in \mathcal{A})(\forall C \subseteq \mathbb{R})(C \subseteq B \longrightarrow C \in \mathcal{A}).$$
Pokazać, że $\bigcup \mathcal{A} = \{z \in \mathbb{R} : \{z\} \in \mathcal{A}\}$.

14. Udowodnić, że dla dowolnego $X \subseteq P(A)$ istnieje najmniejsze ciało zbiorów zawierające X.

15. Udowodnić, że dla dowolnej rodziny zbiorów $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, zachodzi równość
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$
gdzie $B_n = A_n - \bigcup_{i<n} A_i$, dla $n \in \mathbb{N}$.

16. Niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{n-1}{m+1} \leq x < n + m\}$, dla $m, n \in \mathbb{N}$. Znaleźć $\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}$ oraz $\bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$.

17. Określić taką rodzinę $\{A_{i,j} : i, j \in I\}$, żeby wszystkie poniższe zbiory były różne:
$$\bigcup_i \bigcap_j A_{i,j}, \quad \bigcap_i \bigcup_j A_{i,j}, \quad \bigcup_i \bigcup_j A_{i,j}, \quad \bigcap_i \bigcap_j A_{i,j}, \quad \bigcup_j \bigcap_i A_{i,j}, \quad \bigcap_j \bigcup_i A_{i,j}$$

18. Niech $T = \bigcup_{s\in S} T_s$ i niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów T, które z każdym z T_s mają przynajmniej jeden element wspólny. Udowodnij, że
$$\bigcup_{s\in S} \bigcap_{t\in T_s} A_t = \bigcap_{Y\in\mathcal{K}} \bigcup_{t\in Y} A_t.$$

19. Niech $\{A_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ będzie dowolną rodziną indeksowaną. Czy zawsze zachodzi równość:
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{i,j} = \bigcup\bigcup\{A_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}?$$

20. Która z następujących równości zachodzi dla dowolnych zbiorów $A_{t,s}$, gdzie $t \in T$, $s \in S$:
$$\bigcup_{t\in T} \prod_{s\in S} A_{t,s} = \prod_{s\in S} \bigcup_{t\in T} A_{t,s}? \qquad \bigcap_{t\in T} \prod_{s\in S} A_{t,s} = \prod_{s\in S} \bigcap_{t\in T} A_{t,s}?$$

Liczby naturalne von Neumanna

21. Co to jest $\bigcup \mathbb{N}$, $\bigcup P(\mathbb{N})$, $\bigcup n$, $\bigcup P(n)$, jeżeli $n \in \mathbb{N}$?

22. Co to jest $\bigcup\bigcup\bigcup P(P(\mathbb{N}))$?

23. Czy $\bigcup P(\mathbb{N}) = P(\bigcup \mathbb{N})$?

24. Znaleźć $\bigcap\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$, dla $A_0 = \mathbb{N}$ oraz $A_{i+1} = \bigcup A_i$.

Relacje

25. Niech $\mathcal{R}$ będzie taką niepustą rodziną relacji przechodnich w zbiorze A, że dla dowolnych $r, s \in \mathcal{R}$ zachodzi $r \subseteq s$ lub $s \subseteq r$. Udowodnić, że $s = \bigcup \mathcal{R}$ jest relacją przechodnią.

26. Znaleźć przykład 5-elementowej relacji symetrycznej w zbiorze $\mathbb{N}$. Czy istnieje 5-elementowa relacja zwrotna w $\mathbb{N}$? A 5-elementowa relacja przechodnia?

27. Czy relacja $\{\langle 0,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 4,2\rangle\}$ w zbiorze $\{0,1,2,3,4,5\}$ jest przechodnia?

28. Niech r będzie relacją dwuargumentową w zbiorze A. Udowodnić, że równość $\bigcup\bigcup r = A$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x \in A\, \exists y \in A(xry \vee yrx)$.

29. Niech r będzie relacją dwuargumentową w zbiorze A. Czy możliwe jest, że:
    (a) $r^{-1} \subsetneq r$?
    (b) $r \cdot r = r$ i r jest przeciwzwrotna (tj. $\forall x \in A(\neg\, x\, r\, x)$)?
    (c) $r^{-1} = A^2 - r$?

30. Udowodnić, że relacja r jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $(r;r) \subseteq r$.

Funkcje

31. Niech $f : A \to A$ będzie funkcją.
    (a) Udowodnij, że f jest relacją zwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x \in A\ f(x) = x$.
    (b) Czy funkcja f może być relacją symetryczną i nie zwrotną?
    (c) Udowodnij, że f jest relacją spójną wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \leq 1$.

32. Niech A, B, C, D będą niepustymi zbiorami i niech $a : A \to C$ i $b : B \to D$, przy tym niech b nie będzie funkcją stałą. Udowodnić, że relacja $\rho \subseteq B^A \times D^C$, dana warunkiem
$$f \rho g \quad \Leftrightarrow \quad b \circ f = g \circ a$$
jest funkcją z B^A do D^C wtedy i tylko wtedy, gdy a jest bijekcją.

33. Funkcja $f : P(A) \to P(A)$ jest *addytywna*, gdy $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, dla dowolnych zbiorów $X, Y \subseteq A$. Czy każda funkcja addytywna ma własność $f(X) = \bigcup_{x \in X} f(\{x\})$?

34. Niech $f, g : A \to A$. Czy z tego, że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi $f(g(x)) = g(f(x))$ wynika, że f i g są wzajemnie odwrotne?

35. Niech $f : P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle C, D\rangle) = C \cap D$, dla dowolnych $C, D \subseteq \mathbb{N}$, i niech $B \subseteq \mathbb{N}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(\mathbb{N})$? Znaleźć obraz zbioru $P(B) \times P(B)$ i przeciwobraz zbioru $\{\mathbb{N}\}$, przy przekształceniu f.

36. Niech $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie taka, że $\varphi(\langle n, k\rangle) = nk$, dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$. Zbadać, czy φ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathbb{N}$. Znaleźć $\vec{\varphi}\,(\mathbb{P} \times (\mathbb{N} - \mathbb{P}))$, $\vec{\varphi}^{\,-1}(\{10\})$, $\vec{\varphi}^{\,-1}(\mathbb{N} - \mathbb{P})$, $\vec{\varphi}^{\,-1}(\{2^n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\})$, gdzie $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb parzystych.

37. Niech $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $F(f) = \vec{f}^{\,-1}(\{1\})$. Czy F jest różnowartościowa i czy jest na $P(\mathbb{N})$? Znaleźć obraz zbioru funkcji stałych i przeciwobrazy zbiorów $\{\{10\}\}$ i $\{10\}$.

38. Niech $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\varphi) = \vec{\varphi}\,(\mathbb{N})$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(\mathbb{N})$? Znaleźć $\vec{f}^{\,-1}(\mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{B}$ oznacza zbiór jednoelementowych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$.

39. Udowodnić, że $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{f\in J^I}\bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}$.

40. Pokazać, że funkcja $\varphi : P(A)^B \to P(A\times B)$ taka, że dla dowolnego $f \in P(A)^B$,
$$\varphi(f) = \{\langle a, b\rangle \in A\times B : a \in f(b)\},$$
jest różnowartościowa i na $P(A\times B)$.

41. Pokazać, że funkcja $\varphi : P(A\times B) \to P(A)^B$ taka, że dla dowolnych $\Delta \in P(A\times B),\ b \in B$,
$$\varphi(\Delta)(b) = \{a \in A : \langle a, b\rangle \in \Delta\},$$
jest różnowartościowa i na $P(A)^B$.

42. Niech $f : A \to B$ i niech $Z \subseteq A$, $T \subseteq B$. Pokazać, że $Z \subseteq \overrightarrow{f}^{-1}(T)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\overrightarrow{f}(Z) \subseteq T$.

43. Niech $A \neq \emptyset$ i niech $f : A \to A$. Udowodnić, że dla dowolnego $x \in A$ istnieje najmniejszy zbiór $Z \subseteq A$ taki, że $x \in Z$ oraz $\overrightarrow{f}^{-1}(Z) \subseteq Z$.

44.* Czy istnieje taka funkcja f, że $f \in \mathbf{Dom}\, f$?

45. Ile elementów mają zbiory: $\emptyset^\emptyset$, $\emptyset^A$, $A^\emptyset$, jeżeli $A \neq \emptyset$?

46. Podaj przykład funkcji f i takich zbiorów A, B, C, D, że
$$\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f}(A)) \neq A, \qquad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{f}^{-1}(B)) \neq B, \qquad \overrightarrow{f}(C\cap D) \neq \overrightarrow{f}(C) \cap \overrightarrow{f}(D).$$

47. Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe?

    (a) $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \exists B \subseteq \mathbb{N}(\overrightarrow{f}^{-1}(B) \neq \emptyset \wedge B \neq \mathbb{N})$

    (b) $\exists B \subseteq \mathbb{N}\, \forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}(\overrightarrow{f}^{-1}(B) \neq \emptyset \wedge B \neq \mathbb{N})$

    (c) $\exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \forall B \subseteq \mathbb{N}(\overrightarrow{f}^{-1}(B) \neq \emptyset \to B = \mathbb{N})$

    (d) $\forall B \subseteq \mathbb{N}\, \exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}(\overrightarrow{f}^{-1}(B) \neq \emptyset \to B = \mathbb{N})$

48. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wówczas f spełnia warunek $\forall A \subseteq \mathbb{N}(\overrightarrow{f}(A) \subseteq A)$ wtedy i tylko wtedy gdy... jest relacją równoważności.

49. Udowodnić, że rodzina $\{A_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq P(\mathbb{R})$ spełnia warunki
$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t = \emptyset, \qquad \bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t = \mathbb{R}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}(A_t = \bigcup_{s<t} A_s)$$
wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $A_t = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < t\}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

50. Które z poniższych stwierdzeń są równoważne dla każdej funkcji f:

    (a) f jest różnowartościowa;

    (b) dla każdego $x \in \mathrm{Dom}(f)$, zbiór $\overrightarrow{f}(\{x\})$ jest jednoelementowy;

    (c) dla każdego $x \in \mathrm{Rg}(f)$, zbiór $\overrightarrow{f}^{-1}(\{x\})$ jest jednoelementowy?

51. Niech $f : T \to T$ będzie bijekcją. Czy zawsze zachodzą równości
$$\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} A_{f(t)} \quad \text{i} \quad \prod_{t\in T} A_t = \prod_{t\in T} A_{f(t)}?$$

52. Niech $f : T \to T$. Udowodnić, że $f \circ f = f$ wtedy i tylko wtedy gdy $f|_{Rg(f)} = id_{Rg(f)}$.

53. Niech $f : T \to T$ i niech $g = f|_{Rg(f)}$. Udowodnić, że $f^3 = f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g^2 = \mathrm{id}_{Rg(f)}$.

54. Niech $n \geq 1$. Udowodnić, ze funkcja $f : A \to A$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy f^n jest różnowartościowa.

55. Niech A będzie zbiorem skończonym i niech $f : A \to A$. Pokazać, że $f^n \circ f^n = f^n$, dla pewnego n.

56. Niech $f : T \to T$ i niech $f^k = f$ dla pewnego $k \geq 2$. Pokazać, że $Rg(f^m) = Rg(f)$ dla wszystkich $m \geq 2$.

57. Niech $f : A \to B$. Udowodnić, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego C i dowolnych $g, h : C \to A$ zachodzi implikacja $f \circ g = f \circ h \to g = h$.

58. Niech $f : A \to B$. Udowodnić, że f jest na B wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego C i dowolnych $g, h : B \to C$ zachodzi implikacja $g \circ f = h \circ f \to g = h$.

59. Niech $\Phi : \mathbb{C}_\infty([0,1]) \to \mathbb{C}_\infty([0,1])$ będzie taka, że $\Phi(f) = f'$. Czy Φ jest różnowartościowa i na $\mathbb{C}_\infty([0,1])$? Znaleźć np. przeciwobraz zbioru wielomianów.

60. Niech r będzie jądrem funkcji f. Pokazać, że r jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy gdy f jest różnowartościowa, i że r jest spójna wtedy i tylko wtedy gdy f jest funkcją stałą.

61. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takiej, że przeciwobraz każdego zbioru jednoelementowego jest (a) dwulelementowy, (b) nieskończony. To samo zadanie dla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

62. Niech $P'(\mathbb{N}) = P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ i niech $f : P'(\mathbb{N}) \times P'(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle C, D \rangle) = C \times D$, dla dowolnych $C, D \subseteq \mathbb{N}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$? Znaleźć $\vec{f}^{\,-1}(P(Par \times Par))$, gdzie Par oznacza zbiór wszystkich liczb parzystych.

63. Niech $f : P(\mathbb{R}) \to P(P(\mathbb{R}))$ będzie taka, że $f(A) = P(A)$, dla $A \subseteq \mathbb{R}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest "na"? Znaleźć $\vec{f}^{\,-1}(P(P(\mathbb{Q})))$ oraz $\vec{f}\,(P(\mathbb{Q}))$.

64. Niech $I_\alpha = (\alpha, 4 + \alpha)$, dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będzie określona przez równanie $f(x) = \frac{1}{2}x$. Jakimi przedziałami są zbiory:
$$\bigcup\nolimits_{\alpha\in(0,2)} \vec{f}\,(I_\alpha) \qquad \text{oraz} \qquad \bigcap\nolimits_{\alpha\in(0,1)} \vec{f}^{\,-1}(I_{f(\alpha)})?$$

65. Niech $f : A \to B$ i niech $F : P(B) \to P(A)$ będzie określone tak: $F(X) = f^{-1}(X)$. Pokazać, że funkcja f jest różnowartościowa (na) wtedy i tylko wtedy gdy F jest na (różnowartościowa).

66. Niech $\varphi : B \to C$ i niech $\Phi : A^C \to A^B$ będzie taka, że $\Phi(f) = f \circ \varphi$ dla wszystkich f. Zakładając, że A ma co najmniej dwa elementy, pokazać, że
    (a) Φ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest „na";
    (b) Φ jest „na" wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest różnowartościowa.

Relacje równoważności

67. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N}$, która ma 22 klasy abstrakcji, a każda klasa abstrakcji ma 37 elementów?
68. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N}$, która ma 2 klasy abstrakcji po 17 elementów, 5 klas po 33 elementy i jedną klasę nieskończoną?
69. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N}$, która ma nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji?
70. Które z poniższych rodzin podzbiorów płaszczyzny są zbiorami ilorazowymi pewnych relacji równoważności w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?
    (a) rodzina wszystkich parabol o równaniach $y = x^2 + c$, dla $c \in \mathbb{R}$?
    (b) rodzina wszystkich prostych o równaniach $y = cx$, dla $c \in \mathbb{R}$?
    (c) rodzina wszystkich hiperbol o równaniach $y = cx^{-1}$, dla $c \neq 0$?
71. Czy jeśli $A \cap B = \emptyset$ to $A/_r \cup B/_s = A \cup B/_{r \cup s}$?
72. Niech A będzie niepustym zbiorem i niech $f : A \to A$.
    (a) Udowodnić, że jeśli f jest różnowartościowa to relacja $r \subseteq A \times A$, dana warunkiem
    $$xry \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}(f^n(x) = y \vee f^n(y) = x)$$
    jest relacją równoważności.
    (b) Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne, tj. czy jeśli r jest relacją równoważności to f musi być różnowartościowa?
    (c) Podać przykład takich A i f, że r ma nieskończenie wiele skończonych klas abstrakcji, każdą o innej liczbie elementów. (Można zrobić rysunek.)
73. Niech $\mathbb{Z}[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach całkowitych i niech r będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}[x]$, że $\langle f, g \rangle \in r$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy różnica $f - g$ ma wszystkie współczynniki parzyste. Pokazać, że r jest relacją równoważności. Wskazać trzy różne klasy abstrakcji. (Znaleźć moc zbioru ilorazowego relacji r i moc każdej klasy abstrakcji.)
74. Niech s będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, że $\langle f, g \rangle \in s$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy różnica $f - g$ jest zbieżna do zera. Pokazać, że s jest relacją równoważności. Wskazać trzy różne klasy abstrakcji. (Znaleźć moc zbioru ilorazowego relacji r i moc każdej klasy abstrakcji.)
75. Niech s będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, że $\langle f, g \rangle \in s$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\exists n \forall m > n(f(m) = g(m))$. Pokazać, że s jest relacją równoważności. Wskazać trzy różne klasy abstrakcji. (Znaleźć moc zbioru ilorazowego relacji r i moc każdej klasy abstrakcji.)

76. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$, i niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle x, y \rangle) = [x]_r \cup [y]_r$, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$. Czy funkcja f jest różnowartościowa? Czy jest na $P(\mathbb{N})$? Znaleźć $\overrightarrow{f}^{-1}(\{[3]_r\})$ oraz $\overrightarrow{f}(r)$.

77. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$, i niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle x, y \rangle) = [x]_r \cap [y]_r$, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$. Czy funkcja f jest różnowartościowa? Czy jest na $P(\mathbb{N})$? Znaleźć $\overrightarrow{f}^{-1}(\{[3]_r\})$ oraz $\overrightarrow{f}(\mathbb{N} \times \mathbb{N} - r)$.

78. Niech $\mathcal{R}$ będzie niepustą rodziną relacji równoważności w zbiorze A taką, że dla dowolnych $r, s \in \mathcal{R}$ zachodzi $r \subseteq s$ lub $s \subseteq r$. Udowodnić, że $s = \bigcup \mathcal{R}$ jest relacją równoważności, oraz że $[a]_s = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} [a]_r$, dla dowolnego $a \in A$.

79. Niech r_1, r_2 będą takimi relacjami równoważności w zbiorze A, że $r_1 \cap r_2 = id_A$ oraz $r_1 \cdot r_2 = A \times A$. Znaleźć bijekcję z $A/r_1 \times A/r_2$ do A.

80. Niech r_1, r_2 będą relacjami równoważności w zbiorze A. Czy z tego, że $A/r_1 = A/r_2$ wynika, że $r_1 = r_2$? Pokazać, że zbiór $\{u \subseteq A : \exists a \in A(u = [a]_{r_1} \cap [a]_{r_2})\}$ jest zbiorem klas abstrakcji pewnej relacji równoważności w zbiorze A. Co to za relacja?

81. Niech R i S będą relacjami równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych i niech funkcja $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że dla dowolnego $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = [x]_R \cap [x]_S$. Udowodnić, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy $R \cap S$ jest relacją identycznościową.

82. Czy iloczyn dwóch relacji równoważności musi (może) być pusty?

83. Niech rodzina $\mathcal{F} \subseteq P(\mathbb{N})$ spełnia warunki:

    (a) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ oraz $\mathcal{F} \neq P(\mathbb{N})$;

    (b) dla każdych $X, Y \in \mathcal{F}$ zachodzi $X \cap Y \in \mathcal{F}$;

    (c) dla każdego $X \in \mathcal{F}$ i każdego $Y \supseteq X$ zachodzi $Y \in \mathcal{F}$.

    Udowodnić, że relacja $r \subseteq P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$ taka, że

    $$arb \quad \equiv \quad \exists f \in \mathcal{F}(a \cap f = b \cap f)$$

    jest relacją równoważności. Znaleźć klasę abstrakcji $[\mathbb{N}]_r$.

84. Niech $f : A \to B$, gdzie A, B są niepustymi zbiorami i niech r będzie relacją równoważności w zbiorze B. Określamy relację równoważności s w zbiorze A warunkiem:

    $$a\ s\ b \qquad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \qquad f(a)\ r\ f(b)$$

    Czy zawsze zachodzą inkluzje: (a) $\overrightarrow{f}([a]_s) \subseteq [f(a)]_r$; (b) $[f(a)]_r \subseteq \overrightarrow{f}([a]_s)$?

85. Niech $f : A \to B$ i niech r będzie relacją równoważności w zbiorze A. Określamy relację s w zbiorze B warunkiem:

    $$a\ s\ b \qquad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \qquad \exists x, y \in A\,(f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge \langle x, y \rangle \in r)$$

    Jaka musi być funkcja f, aby s była relacją równoważności w B?

86. Niech $f : A \to A$. Czy relacja $r = \{\langle a, b \rangle \in A \times A \mid \exists m, n \in \mathbb{N}(f^m(a) = f^n(b))\}$ jest relacją równoważności w A?

87. Niech $f : A \to A$ i niech $s = \{\langle a, b\rangle \in A \times A \mid \exists m \in \mathbb{N}(f^m(a) = b \vee f^m(b) = a)\}$. Udowodnić, że jeśli f jest różnowartościowa, to s jest relacją równoważności. Czy zachodzi twierdzenie odwrotne?

88. Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$ i niech $f : \mathcal{R} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka,że $f(r) = [1]_r$, dla dowolnego $r \in \mathcal{R}$. Znaleźć $\bigcup_{r\in\mathcal{R}} f(r)$ i $\bigcap_{r\in\mathcal{R}} f(r)$.

89. Niech $\mathcal{R}$ będzie jak w zadaniu 88 i niech $f : \mathcal{R} \to P(P(\mathbb{N}))$ będzie taka, że $f(r) = \mathbb{N}/r$, dla dowolnego $r \in \mathcal{R}$. Znaleźć $\bigcup_{r\in\mathcal{R}} f(r)$ i $\bigcap_{r\in\mathcal{R}} f(r)$. Czy f jest różnowartościowa, czy jest "na"? Znaleźć $\vec{f}(\mathcal{R})$ oraz $\vec{f}^{-1}(\{Z \subseteq P(\mathbb{N}) : \overline{\overline{Z}} = 1\})$ i $\vec{f}^{-1}(\{\{Z \in P(\mathbb{N}) : \overline{\overline{Z}} = 1\}\})$.

90. Niech $\mathcal{R}$ będzie jak w zadaniu 88 i niech $f : \mathcal{R} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(r) = [0]_r \cap [1]_r$. Zbadać, czy f jest różnowartościowa, znaleźć $\vec{f}(\mathcal{R})$ i przeciwobraz zbioru $P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$.

91. Niech $r \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{P}(\mathbb{N})$ będzie taką relacją równoważności, że $X\,r\,Y$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje skończony zbiór Z o własności $X \cup Z = Y \cup Z$. Sprawdzić, że r jest relacją równoważności. Znaleźć $[\emptyset]_r$.

92. Niech r i s będą takimi relacjami równoważności w zbiorze A, że ich suma $r \cup s$ też jest relacją równoważności. Pokazać, że dla dowolnego $x \in A$:
$$[x]_{r\cup s} = \bigcup\{[y]_s : y \in [x]_r\}.$$

93. Udowodnić, że jeśli r_1, r_2 są relacjami równoważności w A to
$$r_1 \cdot r_2 = A \times A \iff r_2 \cdot r_1 = A \times A.$$

94. Niech r będzie relacją w zbiorze $\mathbb{Q} - \{0\}$ liczb wymiernych różnych od zera, określoną tak: xry wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{x}{y} = t^2$, dla pewnej wymiernej liczby t. Udowodnić, że to jest relacja równoważności, i że ma nieskończenie wiele klas abstrakcji.

Porządki częściowe

95. Podać przykład zbioru częściowo uporządkowanego, z dwoma elementami maksymalnymi i jednym minimalnym, bez elementu najmniejszego i z takim czteroelementowym antyłańcuchem, który jest ograniczony z góry ale nie ma kresu górnego.

96. Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $A \subseteq X$ nie ma elementu największego. Niech $B = \{b \in X : \forall a \in A(b > a)\}$. Pokazać, że jeśli istnieje $inf(B)$ to istnieje $sup(A)$ oraz $sup(A) = inf(B) \in B$.

97. W zbiorze $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 24\}$, uporządkowanym częściowo przez relację podzielności ($m \preceq n$ wtedy i tylko wtedy gdy $n = m \cdot k$, dla pewnego $k \in \mathbb{N} - \{0\}$) wskazać wszystkie elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze. Czy istnieją w tym zbiorze trzyelementowe łańcuchy lub antyłańcuchy?

98. Wskazać wszystkie elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze w zbiorze
$$\{\{1, 2, 3, 4, 6\}, \{3\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 3, 5, 2\}, \{3, 4, 2, 4, 1\}, \{2, 1, 2, 2, 1\}, \{2, 1, 2, 1\}\},$$
uporządkowanym przez inkluzję. Czy ten zbiór jest kratą?

99. Niech $\langle X, r \rangle$ i $\langle Y, s \rangle$ będą niepustymi zbiorami częściowo uporządkowanymi i niech $X \cap Y = \emptyset$. Udowodnić, że

    (a) $\langle X \cup Y, r \cup s \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym i nie ma elementu największego;

    (b) Dla dowolnego $a \in X \cup Y$, element a jest minimalny w $\langle X \cup Y, r \cup s \rangle$ wtedy i tylko wtedy gdy jest elementem minimalnym w $\langle X, r \rangle$ lub w $\langle Y, s \rangle$;

100. Jeśli $\leq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze A to relację $<$ nazywamy *ostrym uporządkowaniem* wyznaczonym przez $\leq$. Pokazać, że ostre uporządkowania wyznaczone przez porządki częściowe to dokładnie te relacje, które są przechodnie i przeciwzwrotne.

101. Niech $\langle D, \leq \rangle$ będzie skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym z elementem największym i najmniejszym. Dla $a, b \in D$ stosujemy oznaczenia:

    $$(a, b) = \{d \in D : a < d < b\}; \qquad [a, b] = \{d \in D : a \leq d \leq b\}.$$

    Załóżmy, że dla dowolnych $a, b \in D$, jeśli $(a, b) \neq \emptyset$ to $(a, b) = [c, d]$, dla pewnych c, d (tj. że każdy przedział otwarty jest też przedziałem domkniętym). Udowodnić, że wtedy $\langle D, \leq \rangle$ jest liniowo uporządkowany.

102. Czy zbiór tych słów nad alfabetem $\{0, 1\}$, które mają tyle samo zer co jedynek, ma kres górny (dolny) w porządku leksykograficznym?

103. Czy zbiory $\{01^n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{0^n1 : n \in \mathbb{N}\}$ mają kresy górne (dolne) w zbiorze $\{0, 1\}^*$ uporządkowanym leksykograficznie?

104. Ile jest relacji równoważności w $\mathbb{N}$, które są jednocześnie częściowymi porządkami?

105. Czy zbiór $\mathbb{N}^*$ uporządkowany leksykograficznie jest dobrze ufundowany? A zbiór $\mathbb{N}^2$?

106. Przez *multizbiór* (zbiór z powtórzeniami) nad A, rozumiemy dowolną funkcję $M : A \to \mathbb{N}$. Wtedy $M(a)$ uważa się za liczbę powtórzeń elementu a w multizbiorze M. Multizbiór jest *skończony* jeśli $\{a \in A : M(a) > 0\}$ jest skończony. Jak można dobrze ufundować zbiór wszystkich skończonych multizbiorów nad $\mathbb{N}$?

107. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem dobrze ufundowanym. W zbiorze $P(A)$ określamy porządek częściowy $\sqsubseteq$ w następujący sposób: $X \sqsubseteq Y$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $X = Y$ lub $Y \neq \emptyset$ i dla wszystkich $x \in X$ i $y \in Y$ zachodzi $x \leq y$. Udowodnić, że zbiór $\langle P(A), \sqsubseteq \rangle$ jest dobrze ufundowany.

108. Podaj przykłady:

    - Zupełnego porządku częściowego, który nie jest kratą zupełną;
    - Przekształcenia monotonicznego w kracie zupełnej, które nie jest ciągłe;
    - Trzech nieizomorficznych zbiorów dobrze ufundowanych mocy $\aleph_0$.

109. Podaj przykład takiego przekształcenia monotonicznego f w kracie $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$, że kres górny zbioru $\{f^n(\emptyset) : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest najmniejszym punktem stałym f. Czy można tak wybrać f, aby najmniejszy punkt stały nie istniał?

110. Podać przykład kraty, która ma element największy i najmniejszy, ale nie jest zupełna.

111. Udowodnić, że w kracie zupełnej każdy podzbiór ma kres dolny.

112. Funkcja $f : P(A) \to P(A)$ jest ciągła. Powiemy, że zbiór $x \subseteq A$ jest *dobry*, gdy $f(x) \subseteq x$. Udowodnić, że iloczyn dowolnej rodziny zbiorów dobrych jest dobry i że suma dowolnej skierowanej rodziny zbiorów dobrych jest dobra.

113. Niech f będzie ciągłym przekształceniem kraty zupełnej $\langle K, \leq_K \rangle$ w kratę zupełną $\langle L, \leq_L \rangle$. Czy f jest ciągłym przekształceniem z $\langle K, \geq_K \rangle$ do $\langle L, \geq_L \rangle$? (Inaczej, czy zachowuje kresy dolne zbiorów „skierowanych w dół"?)

114. Niech r będzie relacją częściowego porządku w zbiorze A. Udowodnić, że jeśli $r \cup r^{-1}$ jest relacją równoważności, to każdy skierowany podzbiór zbioru A jest łańcuchem.

115. Niech A będzie zupełnym częściowym porządkiem i niech $f : A \to A$ będzie ciągła.

    (a) Jeśli $a \leq f(a)$ to istnieje taki punkt stały b funkcji f, że $a \leq b$.

    (b) Czy jeśli $a \geq f(a)$ to istnieje taki punkt stały b funkcji f, że $a \geq b$?

116. Udowodnić, że zbiór częściowo uporządkowany jest kratą zupełną wtedy i tylko wtedy gdy jest jednocześnie kratą i zupełnym porządkiem częściowym.

117. Udowodnić, że każdy skończony porządek częściowy jest równoliczny z pewnym podzbiorem $\mathbb{N}$ uporządkowanym przez relację podzielności.

118. Udowodnić, że zbiór wszystkich punktów stałych przekształcenia ciągłego w kracie zupełnej tworzy kratę zupełną.

119. Udowodnić, że w zbiorze $\mathbb{N}^k$, uporządkowanym po współrzędnych, wszystkie antyłańcuchy są skończone.

120. Zbiory A i B są częściowo uporządkowane. W zbiorze B^A określamy relację

$$f \leq g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall a, b \in A (a \leq b \to f(a) \leq g(b)).$$

    Czy relacja $\leq$ jest częściowym porządkiem? A jeśli ograniczymy ją do zbioru funkcji monotonicznych?

121. Niech A będzie zbiorem skończonym i niech $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem skończonych multizbiorów nad A. Pokazać, że dla pewnych $i < j$ zachodzi $M_i \subseteq M_j$, tj. dla wszystkich $a \in A$ ma miejsce nierówność $M_i(a) \leq M_j(a)$.

122. Dla jakich zbiorów $\langle A, \leq \rangle$ porządek leksykograficzny na A^* jest dobrze ufundowany?

123. Relacja r częściowo porządkująca zbiór $\mathbb{N}$ jest *przyjemna*, jeżeli jest dobrym ufundowaniem i ma nieskończony łańcuch, ale nie jest dobrym porządkiem. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich relacji przyjemnych?

124. Niech $F : P(S \times S) \to P(S \times S)$ będzie funkcją monotoniczną o takich własnościach:

    - $\mathrm{id}_S \subseteq F(\mathrm{id}_S)$;
    - $F(r) \cdot F(r') \subseteq F(r \cdot r')$, dla wszystkich r, r';
    - $F(r)^{-1} \subseteq F(r^{-1})$, dla wszystkich r.

Udowodnić, że największy punkt stały funkcji F jest relacją równoważności.

125. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zupełnym porządkiem częściowym, a $f : A \to A$ niech będzie funkcją ciągłą. Zbadać prawdziwość następujących stwierdzeń:

 (a) Jeśli a jest najmniejszym punktem stałym funkcji f to $a = \inf\{x \in A \mid f(x) \leq x\}$.
 (b) Jeśli a jest największym punktem stałym funkcji f to $a = \sup\{x \in A \mid f(x) \geq x\}$.

126. Które z następujących stwierdzeń jest prawdziwe dla dowolnego zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, \leq \rangle$ i dowolnych $A, B \subseteq X$?

 (a) Jeśli w X istnieją $\sup A$ i $\sup B$ to istnieje $\sup(A \cup B)$.
 (b) Jeśli w X istnieje $\sup(A \cup B)$ to istnieją $\sup A$ i $\sup B$.

Lemat Kuratowskiego-Zorna

127. Udowodnić, że w każdym zbiorze częściowo uporządkowanym jest maksymalny łańcuch i maksymalny zbiór skierowany.

128. Niech $B \subseteq \mathbb{R}_+$. Udowodnić, że istnieje podzbiór $C \subseteq \mathbb{R}$, taki że $\forall x, y \in C\, |x - y| \in B$ oraz $\forall x(x \notin C \to \exists y \in C\, |x - y| \notin B)$.

129. Niech $D \subseteq A \times A$. Udowodnić, że istnieje zbiór $Z \subseteq A$ taki, że $(Z \times Z) \cap D = \emptyset$, oraz jeśli $Z \subsetneq V \subseteq A$ to $(V \times V) \cap D \neq \emptyset$.

130. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Udowodnić, że istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $C \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $C \times C \cap r = \emptyset$.

131. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{R}$ jest dowolną rodziną zbiorów, to istnieje taka rodzina $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ zbiorów parami rozłącznych, że dla każdego $A \in \mathcal{R} - \mathcal{S}$ istnieje $B \in \mathcal{S}$ o własności $A \cap B \neq \emptyset$.

132. Czy istnieje taki łańcuch przeliczalnych podzbiorów $\mathcal{R}$, którego suma nie jest przeliczalna?

133. Załóżmy, że $B \subseteq A \times A$. Udowodnić, że istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $C \subseteq A$ taki, że $C \times C \subseteq B$.

134. Rodzinę zbiorów $\mathcal{I} \subseteq P(A)$ nazywamy *ideałem*, jeżeli:

 (a) $\mathcal{I} \neq \emptyset$ oraz $\mathcal{I} \neq P(A)$;
 (b) dla każdych $X, Y \in \mathcal{I}$ zachodzi $X \cup Y \in \mathcal{I}$;
 (c) dla każdego $X \in \mathcal{I}$ i każdego $Y \subseteq X$ zachodzi $Y \in \mathcal{I}$.

 Udowodnić, że każdy ideał można rozszerzyć do maksymalnego ideału.

135. Dowolny podzbiór zbioru $\mathbb{Z}$ nazwiemy *zeznaniem*. Zbiór zeznań $\mathcal{R}$ jest *sprzeczny* jeśli istnieje takie $i \in \mathbb{Z}$, że $i, -i \in \bigcup \mathcal{R}$. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{R}$ jest dowolną rodziną zeznań, to istnieje maksymalna niesprzeczna podrodzina $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$.

136. Niech f będzie bijekcją z A do A. Istnieje maksymalny podzbiór $B \subseteq A$ taki, że $B \subseteq \vec{f}(A - B)$.

137. Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Udowodnić, że istnieje maksymalna rodzina $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, taka że dla dowolnych $f, g \in G$ zachodzi warunek $\exists i (f(i) = g(i))$.

138. Niech $C \subseteq \mathbb{R}$. Udowodnić, że istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ spełniający warunki:

   - $\forall x \forall y (x, y \in A \rightarrow x + y \notin C)$;
   - $\forall x (x \notin A \rightarrow \exists y (y \in A \cup \{x\} \wedge x + y \in C))$.

139. Niech $f : A \times A \rightarrow A$ i niech $C \subseteq A$. Udowodnić, że istnieje maksymalny podzbiór D zbioru A taki, że obraz zbioru $D \times D$ przy funkcji f jest zawarty w C.

140. Udowodnić, ze istnieje taki zbiór parami rozłącznych prostych w $\mathbb{R}^3$, że każda prosta nie należąca do tego zbioru przecina jakąś prostą z tego zbioru.

141. Udowodnić, że istnieje taka rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, że

   (a) dla dowolnych $f, g \in \mathcal{A}$ istnieje takie $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = g(x)$;

   (b) dla dowolnej funkcji $f \notin \mathcal{A}$ istnieje takie $g \in \mathcal{A}$, że $f(x) \neq g(x)$ dla wszystkich $x \in \mathcal{R}$.

142. Niech $f : A \rightarrow B$. Pokazać, że istnieje maksymalny podzbiór A, na którym f jest różnowartościowa.

143. Udowodnić, że każdy częściowy porządek $\langle A, \leq \rangle$ ma taki podzbiór $B \subseteq A$, że:

   (a) Żadne dwa różne elementy B nie są porównywalne;

   (b) Jeśli $a \in A - B$ to istnieje $b \in B$, porównywalne z a.

Moce zbiorów

144. Jakiej mocy jest zbiór punktów leżących na powierzchni bocznej stożka?

145. Jakiej mocy jest podzbiór płaszczyzny ograniczony krzywymi o równaniach $y = x^2$ i $y = 1 - x^2$?

146. Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem wszystkich prostokątów na płaszczyźnie i niech r będzie relacją podobieństwa prostokątów (jest to relacja równoważności w zbiorze $\mathcal{P}$). Znaleźć moc zbioru ilorazowego $\mathcal{P}/r$. Jakiej mocy są klasy abstrakcji relacji r?

147. Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnić, że dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $\vec{f}^{\,-1}(\{x\})$ nie zawiera żadnej kuli.

148. Udowodnić, że zbiór A jest nieskończony wtedy i tylko wtedy gdy
$$\forall f \in A^A \, \exists B \in P(A) \; ((B \neq \emptyset) \wedge (B \neq A) \wedge (\vec{f}(B) \subseteq B)).$$

149. Znaleźć moc zbioru wszystkich porządków liniowych w zbiorze $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych.

150. Znaleźć moc zbioru wszystkich relacji symetrycznych w zbiorze $\mathbb{Z}$ wszystkich liczb całkowitych.

151. Udowodnić, że jeśli A jest dowolnym zbiorem parami rozłącznych otwartych przedziałów na prostej, to $\overline{\overline{A}} \leq \aleph_0$.

152. Udowodnić, że zbiór punktów nieciągłości funkcji rosnącej z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalny.

153. Czy zbiór ekstremów lokalnych funkcji ciągłej z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ może być nieprzeliczalny?

154. Czy zbiór zer funkcji ciągłej z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ może być nieprzeliczalny?

155. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $\vec{f}^{\,-1}(\{x\})$ jest:
(a) odcinkiem? (b) kwadratem?

156. Niech relacja równoważności $r \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie taka, że:
$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq [x]_r).$$
Co można powiedzieć o mocy zbioru $\mathbb{R}/r$?

157. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie taki, że:
$$\forall x \in A\, \exists \varepsilon > 0\, (A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{x\}).$$
Co można powiedzieć o mocy zbioru A?

158. Jaka liczba kardynalna jest najmniejsza, a jaka największa?

159. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{R}$, której każda klasa abstrakcji jest mocy $\aleph_0$, oraz
(a) $\overline{\overline{\mathbb{R}/r}} = \mathfrak{C}$? (b) $\overline{\overline{\mathbb{R}/r}} = \aleph_0$?

160. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{R}$, której każda klasa abstrakcji jest mocy continuum, oraz $\mathbb{R}/r$ jest zbiorem (a) przeliczalnym? (b) nieprzeliczalnym?

161. Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe?
$$\textit{Jeśli } f : A \xrightarrow{1-1} B \textit{ oraz } \vec{f}(A) \neq B \textit{ to } \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$$
$$\textit{Jeśli } \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \textit{ i } C \neq \emptyset \textit{ to } \overline{\overline{A \times C}} < \overline{\overline{B \times C}}$$

162. Czy produkt przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych musi być przeliczalny?

163. Znaleźć moc zbioru wszystkich czteroelementowych podziałów zbioru $\mathbb{R}$.

164. Udowodnić, że na płaszczyźnie istnieje okrąg, którego każdy punkt ma przynajmniej jedną współrzędną niewymierną.

165. Znaleźć moc zbioru wszystkich dobrych porządków w zbiorze $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych.

166. Znaleźć moc zbioru wszystkich ciągów liczb wymiernych, które są zbieżne do zera.

167. Znaleźć moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

168. Obliczyć moce zbiorów:
    - $X = \{A : A \subseteq \mathbb{R}$ i A ma element najmniejszy i największy$\}$;
    - $Y = \{A : A \subseteq \mathbb{Z}$ i A ma element najmniejszy i największy$\}$.

169. Niech R będzie relacją częściowego porządku w zbiorze $\mathbb{Z}$. Znaleźć moc zbioru R.

170. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich łańcuchów
    - w zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$, uporządkowanym przez relację podzielności?
    - w zbiorze słów nad alfabetem $\{a, b\}$, uporządkowanym prefiksowo?

171. Które z następujących zbiorów są ze sobą równoliczne:
$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z},\ \ \mathbb{R} \times \mathbb{Q},\ \ \mathbb{R} - \mathbb{Q},\ \ 2^{\mathbb{N}},\ \ 2^{\mathbb{R}},\ \ P(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}),\ \ \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^m?$$

172. Które z następujących zbiorów są równoliczne:
$$\mathbb{Z},\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \{0,1\}^*,\ \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ P(\mathbb{Q}),\ P(\mathbb{R})?$$

173. Relacja równoważności R w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest określona następująco:
$$R = \{\langle f, g\rangle : \forall n (f(2n) = g(2n))\}.$$
Podać moc zbioru wszystkich klas abstrakcji relacji R, oraz moc każdej klasy.

174. Znaleźć moc zbioru $C = \{X \in P(\mathbb{R}) : X \cap \mathbb{Q}$ jest skończone$\}$.

175. Znaleźć moc zbioru wszystkich łańcuchów maksymalnych w zbiorze $\{0, 1\}^*$ z relacją porządku prefiksowego.

176. Niech $\overline{\overline{A}} = 2^{\mathfrak{C}}$. Udowodnić, że istnieje $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$, taka że zbiór $\{x \in A : x = f(x)\}$ jest mocy $\mathfrak{C}$.

177. Niech $\overline{\overline{A}} = 2^{\mathfrak{C}}$. Udowodnić, że istnieje $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$, taka że zbiór $\{x \in A : x \neq f(x)\}$ jest mocy $\mathfrak{C}$.

178. Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$. Określamy relację równoważności ρ w zbiorze $\mathcal{R}$ warunkiem: $r_1 \rho r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory $\mathbb{N}/r_1$ i $\mathbb{N}/r_2$ są równoliczne. Znaleźć moc $\mathbb{N}/\rho$, oraz moc $[r]_\rho$, gdzie mrn zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2|mn(n + 1)$

179. Niech r będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{Q}$ określoną tak: xry wtedy i tylko wtedy gdy $x^2 + y^2 \neq 0$ lub $xy = 0$. Znaleźć moc zbioru $\mathbb{Q}/r$ oraz moce klas abstrakcji.

180. Pokazać że jeśli $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$ oraz $0 \neq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$, to istnieje relacja równoważności r w zbiorze A spełniająca warunek $\overline{\overline{A/r}} = \mathfrak{n}$.

181. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich skończonych (nieskończonych, przeliczalnych, mocy $\mathfrak{C}$) podzbiorów $\mathbb{R}$?

182. Niech $\varphi : \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $\varphi(\langle p, r\rangle) = p(r)$. Jaka jest moc zbioru $\overrightarrow{\varphi}^{-1}(\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ i zbioru $\mathbb{Z}[x] \times \mathbb{R}/\mathrm{ker}\varphi$? Udowodnić, że jeśli $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}$ oraz $X_1 \cap \mathbb{Z}$ i $X_2 \cap \mathbb{Z}$ są niepuste, to zbiory $\overrightarrow{\varphi}^{-1}(X_1)$ i $\overrightarrow{\varphi}^{-1}(X_2)$ są równoliczne.

183. Podzbiór W zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nazywamy *wypukłym,* jeśli dla dowolnych trzech liczb wymiernych $a < b < c$, jeśli $a, c \in W$, to także $b \in W$. Ile jest wszystkich podzbiorów $\mathbb{Q}$, które są wypukłe? Ile jest podzbiorów, które nie są wypukłe?

184. Niech $X \neq \emptyset$ będzie ustalonym zbiorem i niech $a \in X$ będzie ustalonym elementem. W zbiorze $P(X)$ określamy następującą relację równoważności: $A \sim B$ wtedy i tylko wtedy gdy $A = B$ lub $a \notin A \cup B$. Zbadać moc zbioru $P(X)/_{\sim}$, w zależności od mocy zbioru X.

185. Czy istnieje zbiór mocy mniejszej niż zbiór jego wszystkich skończonych podzbiorów?

186. Czy istnieją zbiory A i B takie, że $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, ale A^B i B^A są równoliczne?

187. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich funkcji okresowych z $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$? A zbiór wszystkich funkcji okresowych z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{Q}$? (Przyjmujemy, że funkcja $f : X \to X$ jest okresowa, jeżeli nie jest stała, oraz istnieje takie $d \in X$, że $d > 0$ i dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $f(x + d) = f(x)$.)

188. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^2$?

189. Jakiej mocy jest zbiór punktów leżących na powierzchni kuli?

190. Ile jest wszystkich relacji przechodnich $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

191. Ile jest funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$: (a) nierosnących? (b) niemalejących?

192. Udowodnić, że jeśli w rodzinie podzbiorów zbioru liczb naturalnych każde dwa różne zbiory mają co najwyżej jeden element wspólny, to rodzina ta jest przeliczalna.

193. Czy teza poprzedniego ćwiczenia pozostaje prawdziwa przy założeniu, że:

    (a) każde dwa różne zbiory z danej rodziny mają co najwyżej k wspólnych elementów?

    (b) każde dwa różne zbiory z danej rodziny mają skończony iloczyn?

194. Jakiej mocy jest zbiór funkcji monotonicznych z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$?

195. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$?

196. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych relacji równoważności w $\mathbb{N}$, które mają skończenie wiele klas abstrakcji?

197. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych relacji równoważności w $\mathbb{N}$, które mają tylko skończone klasy abstrakcji?

198. Dla $a \in \mathbf{N}$ określamy $C_a = \{\langle x, y \rangle \in \mathbf{R}^2 : ax \leq y < (a+1)x\}$. Znaleźć moc każdego ze zbiorów C_a. Czy istnieje takie X i takie r, że $X/r = \{C_a : a \in \mathbf{N}\}$? Jeśli tak, to znaleźć X. Co się zmieni, jeśli przyjmiemy $C_a = \{\langle x, y \rangle \in \mathbf{R}^2 : |ax| \leq |y| < |(a+1)x|\}$?

199. Które ze zbiorów: A, B, f, $Rg(f)$ są równoliczne dla dowolnej funkcji $f : A \to B$? Które są równoliczne pod warunkiem, że funkcja f jest różnowartościowa? (Gdy jest na? Gdy jest i taka i taka?)

200. Czy istnieje zbiór X taki, że $|P(X)| = \aleph_0$? A taki, że $|X^X| = \aleph_0$? A może taki, że $|\mathbb{N}^X| = \aleph_0$?

201. Niech A będzie zbiorem (niekoniecznie wszystkich) ciągów dodatnich liczb naturalnych o tej własności, że dla każdego ciągu liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots$ (niekoniecznie należącego do zbioru A) istnieje w A ciąg $b_1, b_2, \ldots$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty.$$

Udowodnić, że $|A| > \aleph_0$.

202. Ile jest takich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że każdy zbiór $\overrightarrow{f}^{-1}(\{n\})$ jest skończony?

203. Niech $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}} < \mathfrak{C}$. Pokazać, że $\overline{\overline{A \cup B}} < \mathfrak{C}$.

204. Niech $\overline{\overline{A}} < \mathfrak{C}$ i $\overline{\overline{B}} \leq \aleph_0$. Pokazać, że $\overline{\overline{A \times B}} < \mathfrak{C}$.

205.* Ile jest łańcuchów w zbiorze $P(\mathbb{N})$ uporządkowanym przez inkluzję?

206. Ile jest nieskończonych drzew binarnych?

207. W zbiorze $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ określamy relację równoważności r, przyjmując frg wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są ich moce?

208. Dwa prostokąty na płaszczyźnie są w relacji r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przesunięcie przekształcające jeden na drugi. Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są ich moce?

Porządki liniowe i dobre

209. Które z następujących podzbiorów $\mathbb{R}$ (ze zwykłym uporządkowaniem) są ze sobą izomorficzne: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Q} - [0,1]$, $B = \{m \cdot 2^{-n} : m, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \bigcup_{m\in\mathbb{N}}(2m, 2m+1]$?

210. Niech $A = \{3 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, $B = \{\pi - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{4\}$, $C = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Rozpatrzmy zbiory A, B, C, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} - \{0\}$, uporządkowane liniowo przez zwykłą relację "$\leq$". Które z nich są dobrze uporządkowane? Które są izomorficzne?

211. Rozważamy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z porządkiem

   (a) leksykograficznym;

   (b) $(x, y) \leq (x', y')$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \leq x'$ i $y \leq y'$.

   Czy istnieje funkcja z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, zachowująca porządek? Czy istnieje taka funkcja na $\mathbb{R}$? A czy istnieje taka funkcja różnowartościowa?

212. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie dobrym porządkiem, i niech $\{S_a : a \in A\}$ będzie dowolną rodziną zbiorów. Udowodnić, że $\bigcup_{a\in A} S_a = \bigcup_{a\in A}(S_a - \bigcup_{b<a} S_b)$.

213. Podaj trzy przykłady zbiorów dobrze uporządkowanych mocy $\aleph_0$, tak aby żadne dwa nie były ze sobą izomorficzne.

214. Czy istnieje relacja dobrze porządkująca zbiór $P(\mathbb{R})$?

215. Czy istnieje relacja dobrze porządkująca zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

216. Niech $P_{fin}(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \overline{\overline{A}} < \aleph_0\}$. Zdefiniować taki dobry porządek $\preceq$ w zbiorze $P_{fin}(\mathbb{N})$, żeby $\forall A, B \in P_{fin}(\mathbb{N})\ (A \subseteq B \to A \preceq B)$.

217. Niech $\leq$ będzie relacją dobrego porządku w zbiorze A, i niech $f : A \to A$ spełnia warunek
$$\forall x, y \in A\ (x < y \ \rightarrow\ f(x) < f(y)).$$
Udowodnić, że $x \leq f(x)$, dla dowolnego $x \in A$.

218. Niech $\preceq$ będzie relacją liniowego porządku w zbiorze A, taką że każdy właściwy odcinek początkowy w zbiorze A jest postaci $\mathrm{O}(x) = \{y \in A : y \prec x\}$, dla pewnego $x \in A$. Udowodnić, że $\preceq$ jest dobrym porządkiem.

219. Niech $\langle\ A, \leq\ \rangle$ będzie nieskończonym zbiorem dobrze uporządkowanym. Pokazać, że nie istnieje taka różnowartościowa funkcja $f : A \to A$, że dla dowolnych $a, b \in A$, jeśli $a \leq b$ to $f(b) \leq f(a)$.

220. Niech $\langle\ A, \leq\ \rangle$ będzie dobrym porządkiem, i niech $f : A \to A$ będzie różnowartościowa. Jeżeli dla dowolnych $x, y \in A$ warunek $x \leq y$ implikuje $f(x) \leq f(y)$, to wtedy $x \leq f(x)$ dla każdego $x \in A$.

221. Wskazać wszystkie liczby porządkowe $\alpha < \omega^2$ spełniające równanie $2\alpha = \alpha$.

222. Niech $\mathcal{D} = \langle D, \leq\rangle$ będzie dobrym porządkiem. Określamy zbiór $D' \subseteq D$ przez $D' = \{d \in D \mid d \neq \min D$ jest elementem granicznym w $\mathcal{D}\} = \{d \in D \mid d \neq \min D$ nie jest następnikiem w $\mathcal{D}\}$ oraz dobry porządek $\mathcal{D}' = \langle D', \leq_{|D'}\rangle$. Skonstruować przykład dobrego porządku $\mathcal{D}$ takiego, że wszystkie zbiory $D', D'', D''', \ldots$ są niepuste. Czy istnieje taki zbiór przeliczalny?

223. Podać przykład dobrego porządku $\mathcal{D} = \langle\ D, \leq\ \rangle$ i (ostro) rosnącej funkcji $f : D \to D$, która spełnia jednocześnie warunki:

    (a) $\forall a \in D\, \exists b \in D\, (a < b \wedge f(b) = b)$;

    (b) $\forall a \in D\, \exists b \in D\, (a < b \wedge f(b) > b)$;

224. Niech $\langle\ A, \leq\rangle$ linowy porządek z elementem najmniejszym 0 i elementem największym 1. Funkcja $f : A \to A$ jest *zmniejszająca* jeśli $f(x) < x$, dla każdego $x \neq 0$. Funkcja f jest *zwiększająca*, jesli $f(x) > x$, dla każdego $x \neq 1$. Rozpatrzmy nastepujace warunki:

    (a) dla każdej funkcji zmniejszającej f zachodzi $\forall x \exists n f^n(x) = 0$;

    (b) dla każdej funkcji zwiększającej f zachodzi $\forall x \exists n f^n(0) \geq x$.

    Czy warunek (a) implikuje (b)? Czy (b) implikuje (a)?

225. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie dobrze uporządkowany przez zwykłą relację nierówności dla liczb rzeczywistych. Udowodnić, że A jest zbiorem przeliczalnym.

226. Rozszerzyć porządek prefiksowy na słowach do dobrego porządku. Jaka jest jego liczba porządkowa?

Zadania z klasówek i egzaminów 2001–2007

227. Funkcja $F : \mathbf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$ jest określona warunkiem $F(x) = \bigcup\{x(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$.
    (a) Czy F jest funkcją różnowartościową?
    (b) Czy F jest na $\mathbf{P}(\mathbb{N})$?
    (c) Czy istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $\vec{F}^{-1}(\{A\})$ jest zbiorem jednoelementowym?
    (d) Czy istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $\vec{F}^{-1}(\{A\})$ jest zbiorem czteroelementowym?

228. Ustalmy $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Określamy relacje $r_k, r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ w następujący sposób:
    $\langle x, y \rangle \in r_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są parzyste i $x - y$ jest podzielne przez k;
    $\langle x, y \rangle \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są nieparzyste oraz $x \cdot y > 0$.
    (a) Udowodnić, że relacja $\rho_k = r_k \cup r$ jest relacją równoważności.
    (b) Czy istnieje takie $x \in \mathbb{Z}$, że $[x]_{\rho_k}$ ma dokładnie k elementów?
    (c) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $\mathbb{Z}/_{\rho_k}$, gdy:
        i. $k = 4$?
        ii. $k = 3$?

229. Zbiór $T \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ jest *dobry*, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych a, x:
    - Jeśli $\langle a, x \rangle \in T$ i $\langle b, x \rangle \in T$, oraz $a \subseteq b$ to $a = b$.

    Funkcja $\Phi : \{T \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid T \text{ jest dobry}\} \to \mathbf{P}(\mathbb{N})^{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$ jest określona tak:
    $$\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists b\, (b \subseteq a \wedge \langle b, x \rangle \in T)\}.$$
    (a) Czy Φ jest na $\mathbf{P}(\mathbb{N})^{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$?
    (b) Czy istnieje takie T, że
        i. $\Phi(T) = \mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$?
        ii. $\Phi(T)$ jest funkcją stałą?
    (c) Czy Φ jest funkcją różnowartościową?

230. Proszę objaśnić nastepujące pojęcia, podając w każdym przypadku definicję i przykład.
    (a) Obraz zbioru a przy przekształceniu $h : b \to c$;
    (b) Klasa abstrakcji relacji s w zbiorze a wyznaczona przez element b;
    (c) Produkt uogólniony rodziny $\{a_T\}_{T \in t}$;
    (d) Zupełny porządek częściowy;
    (e) Kres górny podzbioru a w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle b, \leq \rangle$.
    (f) Zbiór dobrze ufundowany.

231. Funkcja $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest określona tak:
$$F(f,g)(n) = \min(f(n), g(n)),$$
dla dowolnych $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Czy funkcja F jest „na”?
   (b) Czy jest to funkcja różnowartościowa?
   (c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra[2] funkcji F?
   (d) Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?

232. Udowodnić, że w każdym zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór skierowany.

233. Niech $\langle K, \leq \rangle$ będzie kratą zupełną i niech S będzie zbiorem wszystkich punktów stałych funkcji ciągłej $f : K \to K$. Załóżmy, że $P \subseteq S$ i niech a będzie kresem górnym zbioru P w kracie K.
   (a) Udowodnić, że zbiór $\{b \in S \mid b \geq a\}$ ma element najmniejszy.
   (b) Czy ten element najmniejszy to musi być a?
   (c) Czy zbiór uporządkowany $\langle S, \leq \rangle$ jest kratą zupełną?

234. Czy następujące stwierdzenia są prawdziwe? Jeśli nie, co należy wpisać zamiast wielokropka? To zadanie wyjątkowo nie wymaga uzasadnień.
   (a) Przeciwobraz obrazu zbioru a przy ... przekształceniu f pokrywa się ze zbiorem a.
   (b) Jeśli d jest relacją równoważności w a oraz $b, c \in a$ ... to $[b]_d \cap [c]_d = \emptyset$.
   (c) W każdym drzewie nieskończonym ... istnieje gałąź nieskończona.
   (d) Produkt uogólniony dowolnej ... rodziny zbiorów skończonych jest zawsze skończony lub nieprzeliczalny
   (e) Każde ciągłe ... przekształcenie kraty zupełnej w siebie ma najmniejszy punkt stały.
   (f) Jeśli $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{C}$ i B jest ... zbiorem przeliczalnym, to $\overline{\overline{A^B}} = \mathfrak{C}$.
   (g) Jeśli A jest ... zbiorem przeliczalnym, to $\overline{\overline{A^A}} = \mathfrak{C}$.
   (h) Każdy przedział ... w zbiorze liczb rzeczywistych można dobrze uporządkować.

235. Jaka jest moc zbioru wszystkich dobrze ufundowanych częściowych porządków w $\mathbb{N}$?

236. Rozpatrzmy następujące częściowe uporządkowanie zbioru $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$:
$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(f(x) \leq g(x)).$$
   (a) Czy ten porządek jest liniowy?
   (b) Czy ten porządek jest dobrym ufundowaniem?
   (c) Czy ten porządek jest kratą zupełną?
   (d) Czy istnieje w tym porządku łańcuch nieskończony?

[2] *Jądro* przekształcenia $f : a \to b$ to relacja równoważności $\ker(f) = \{\langle x, y \rangle \in a \times a \mid f(x) = f(y)\}$.

(e) Czy istnieje w tym porządku antyłańcuch nieskończony?

(f)* Czy istnieje w tym porządku antyłańcuch nieprzeliczalny?

(g)* Czy istnieje łańcuch nieprzeliczalny w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ uporządkowanym w analogiczny sposób, tj. przez relację:

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(f(x) \leq g(x))?$$

237. Niech A będzie ustalonym podzbiorem płaszczyzny, który ma przynajmniej dwa elementy. Udowodnić, że istnieje podzbiór $B \subseteq A$, o takich własnościach:

- Żadne trzy różne punkty zbioru B nie są współliniowe;
- Każdy punkt zbioru $A - B$ leży na pewnej prostej wyznaczonej przez dwa różne punkty ze zbioru B.

238. Niech $Z \subseteq N$. Określamy relację $R_Z \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N}) \times \mathbf{P}(\mathbb{N})$ następująco:

$$\langle X, Y\rangle \in R_Z \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \cup Z = Y \cup Z.$$

Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathbf{P}(\mathbb{N})$. Funkcja $f : \mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{R}$ jest określona warunkiem $f(Z) = R_Z$.

(a) Czy funkcja f jest różnowartościowa?

(b) Czy funkcja f jest na $\mathcal{R}$?

(c) Znajdź $\overrightarrow{f}^{-1}(\{I_{P(\mathbb{N})}\})$ i $\overrightarrow{f}^{-1}(\{P(\mathbb{N})^2\})$.

239. Podać przykład takiej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$, aby funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$, określona wzorem

$$g(i) = \overrightarrow{f}^{-i}(X),$$

gdzie $\overrightarrow{f}^{-i}(X)$ oznacza przeciwobraz X przy przekształceniu f^i, była różnowartościowa.

240. Dana jest następująca relacja równoważności $r \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N})^2$:

$$P\ r\ Q \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad \begin{array}{ll} P = Q = \emptyset & \text{lub} \\ P, Q \neq \emptyset & \text{i } \min P = \min Q. \end{array}$$

Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathbf{P}(\mathbb{N})/_r$? Jakie są moce poszczególnych klas abstrakcji?

241. Jakiej mocy jest zbiór tych wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że każdy ze zbiorów $\overrightarrow{f}^{-1}(\{n\})$ jest innej mocy?

242. Niech $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{P}(\mathbb{N})^{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$ będzie określona w następujący sposób:

$$\varphi(f)(A) = \vec{f}^{-1}(A).$$

(a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa?

(b) Czy funkcja φ jest na?

(c) Znaleźć $\vec{\varphi}^{-1}(\{Id_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}\})$.

(d) Czy istnieje funkcja $f \in Rg\varphi$, która jest różnowartościowa? Czy każda funkcja $f \in Rg\varphi$ jest różnowartościowa?

243. Powiemy, że zbiór funkcji $F \subseteq 2^X$ *rozróżnia elementy zbioru* $A \subseteq X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych różnych $x, y \in A$ istnieje taka funkcja $f \in F$, że $f(x) \neq f(y)$.

(a) Czy istnieje minimalny (ze względu na inkluzję) zbiór $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ rozróżniający elementy zbioru $\mathbb{N}$?

(b) Czy istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ nie rozróżniający elementów zbioru $\mathbb{N}$?

(c) Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych podzbiorów zbioru $2^{\mathbb{N}}$, które rozróżniają elementy zbioru $\mathbb{N}$?

(d) Czy dla każdego $F \subseteq 2^X$ istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $A \subseteq X$, którego elementy rozróżnia zbiór F?

244. Niech $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ i niech $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$ i $g : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}^+$. Definiujemy funkcję $h : \mathbb{Q} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q}^+$, przyjmując $h(f(n)) = g(m)$, gdzie

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i < n\, [h(f(i)) \neq g(k) \wedge [f(i) \leq f(n) \leftrightarrow h(f(i)) \leq g(k)]]\}.$$

Czy funkcja h jest dobrze określona? Czy jest „na $\mathbb{Q}^+$”?

245. Nie powołując się na twierdzenie Cantora, proszę udowodnić następujący wariant tego twierdzenia:

Dla żadnego zbioru A nie istnieje surjekcja z A na 2^A.

246. Niech $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}(\mathbb{R})$ będzie określona następująco: $\phi(f) = \vec{f}^{-1}(\mathbb{IQ})$, gdzie $\mathbb{IQ} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Zbadać, czy funkcja ϕ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathbf{P}(\mathbb{R})$.

247. Jaka jest moc zbioru $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \overline{\overline{\phi(f)}} = \aleph_0\}$, jeśli ϕ jest funkcją z zadania 246?

248. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$. Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}$ jest *D-łatwy*, gdy $(x + y)^3 - 2xy \in D$ dla wszystkich $x, y \in V$, takich że $x \neq y$. Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}$ jest *D-trudny*, gdy:

$$\forall x \in \mathbb{R}(x \in V \vee \exists y \in V((x + y)^3 - 2xy \notin D)).$$

Dla jakich D istnieje zbiór V, jednocześnie D-łatwy i D-trudny?

249. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem i niech $f : A \to A$. Załóżmy, że dla każdego łańcucha L w $\langle A, \leq \rangle$ istnieją kresy dolne zbiorów L i $\vec{f}(L)$, a jeśli $L \neq \emptyset$, to na dodatek $f(\inf L) = \inf(\vec{f}(L))$. Udowodnić, że f ma największy punkt stały.

Uwaga: Założenia o kresach dolnych dotyczą *tylko łańcuchów*!

250. Niech $\mathbb{IQ} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i niech $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ będzie taka, że $\phi(f) = \vec{f}(\mathbb{IQ})$. Zbadać, czy funkcja ϕ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathbf{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$.

251. Niech $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}(\mathbb{R})$ będzie określona następująco: $\phi(f) = \vec{f}^{-1}(\mathbb{IQ})$, gdzie $\mathbb{IQ} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(a) Czy $r = \{\langle f, g \rangle \mid \mathbb{Q} \subseteq \phi(f) \cap \phi(g)\}$ jest relacją równoważności w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

(b) Czy $s = \{\langle f, g\rangle \mid \phi(f) \times \phi(g)$ *jest relacją równoważności w* $\mathbb{R}\}$ jest relacją równoważności w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

252. Dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ określamy funkcje $f_k : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jak niżej:

$$f_k(a)(n) = \begin{cases} a(n) + a(n+1) - a(n)a(n+1), & \text{dla } n = k, \\ a(n)a(n+1), & \text{dla } n = k+1, \\ a(n), & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Każdą z takich funkcji nazywamy *wesołą transformacją*. Wyznacz moc zbioru G wszystkich tych ciągów należących do $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, które za pomocą skończonej liczby wesołych transformacji można przekształcić w jakiś element zbioru

$$B = \{a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N}(\forall i < n(a(i) = 1) \wedge \forall i \geq n(a(i) = 0))\}.$$

253. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy *wzorcowym*, jeżeli każda liczba rzeczywista jest współmierna[3] z pewną liczbą ze zbioru A, ale żadne dwie różne liczby ze zbioru A nie są współmierne. Czy istnieją zbiory wzorcowe?

254. Niech $\langle Er, \leq\rangle$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym i niech $Ku \subseteq Er$ będzie podzbiorem zbioru Er o mocy $\aleph_0$. Załóżmy, że

- Każdy niepusty podzbiór zbioru Er ograniczony z góry ma kres górny.
- Jeśli $x, y \in Er$ i $x < y$ to istnieje takie $ku \in Ku$, ze $x < ku < y$.
- W zbiorze Er nie ma elementu pierwszego ani ostatniego.

Udowodnić, że zbiór Er jest mocy continuum.

255. Niech $\Phi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbf{P}(\mathbb{N}))$ będzie taka, że

$$\Phi(f)(A) = \vec{f}^{\,-1}(\vec{f}(A)),$$

dla wszystkich $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $A \subseteq \mathbb{N}$.ls ma

(a) Czy funkcja Φ jest różnowartościowa?

(b) Czy funkcja Φ jest na zbiór $\mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$?

(c) Znaleźć przeciwobraz $\vec{\Phi}^{\,-1}(\{\mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}\})$, gdzie $\mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$ to funkcja identycznościowa z $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ do $\mathbf{P}(\mathbb{N})$.

(d) Udowodnić, że dla dowolnego $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje taka relacja równoważności $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, że dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi

$$\Phi(f)(A) = \bigcup\{[a]_r \mid a \in A\}.$$

256. W zbiorze $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych określamy relację równoważności r:

$$f \; r \; g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f - g \text{ jest funkcją liniową.}$$

[3] Liczby rzeczywiste x i y są *współmierne*, gdy $mx + ny = 0$ dla pewnych całkowitych m i n, różnych od 0.

Znaleźć moc zbioru ilorazowego relacji r i moc każdej klasy abstrakcji.

257. Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ będą niepustymi zbiorami. Dla dowolnej liczby x przez $|x - A|$ oznaczamy odległość x od zbioru A, czyli $\inf\{|x - a| \mid a \in A\}$. Udowodnić, że istnieje podzbiór T zbioru B o takich własnościach:

- Jeśli $x, y \in T$ oraz $x \neq y$ to $|x - y| \geq \frac{1}{2}(|x - A| + |y - A|)$;
- Jeśli $x \in B - T$ to istnieje takie $y \in T$, że $|x - y| < \frac{1}{2}(|x - A| + |y - A|)$.

258. Udowodnić, że funkcja $f : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ jest ciągła (ze względu na inkluzję) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(a) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq a\},$$

dla dowolnego $a \in P(\mathbb{N})$.

259. Objaśnić co to znaczy, że:

(a) Zbiór X jest przeciwobrazem zbioru Y przy funkcji $f : A \to B$;

(b) Moc zbioru X jest mniejsza od mocy zbioru Y;

(c) Zbiór X jest klasą abstrakcji relacji równoważności r w zbiorze A;

(d) Zbiór X jest liczbą naturalną;

(e) Zbiór X jest skończony;

(f) Zbiór X jest dobrze ufundowany przez relację $\preceq$;

(g) Zbiór X jest zupełnym porządkiem częściowym;

(h) Podzbiór X zbioru A ma kres górny w $\langle A, \preceq \rangle$;

(i) Moc zbioru X jest iloczynem liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$.

260. Relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$ jest określona tak:

$$\langle m, n \rangle \in r \iff m \text{ i } n \text{ mają te same dzielniki pierwsze.}$$

Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są moce tych klas?

261. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *uporczywa*, gdy spełnia warunek

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, (k > m \wedge f(k) = n).$$

Jakiej mocy jest zbiór U wszystkich funkcji uporczywych?

Rozwiązania[4]

227: Funkcja F jest na $P(\mathbb{N})$, bo każdy podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest postaci $F(x)$, gdzie x jest ciągiem stale równym A. Ale nie jest różnowartościowa, bo na przykład $F(x) = F(y)$ dla ciągu stałego $x(i) = \mathbb{N}$ i ciągu

$$y(i) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{jeśli } i \text{ jest parzyste;} \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla $A = \emptyset$, jedyny ciąg x spełniający warunek $F(x) = \emptyset$ to ciąg stały $x(i) = \emptyset$. Zatem $\vec{F}^{-1}(\{\emptyset\})$ jest jednoelementowy. Natomiast jeśli $A \neq \emptyset$ to $\vec{F}^{-1}(\{A\})$ musi być nieskończony. Do tego przeciwobrazu należą bowiem wszystkie funkcje y_k postaci

$$y_k(i) = \begin{cases} A, & \text{jeśli } i = k; \\ \emptyset, & \text{jeśli } i \neq k, \end{cases}$$

gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. A więc nie istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $\vec{F}^{-1}(\{A\})$ ma dokładnie cztery elementy.

228a: Zwrotność: Jeśli x jest parzyste to $x - x = 0$, a zero jest podzielne przez k. Jeśli zaś x jest nieparzyste, to $x \cdot x \geq 0$, przy czym nierówność jest ostra bo $x \neq 0$.
Symetria: Oczywista.
Przechodniość: Niech $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \rho_k$. Wtedy x i z muszą być tej samej parzystości co y. Zatem wszystkie trzy liczby są parzyste albo wszystkie trzy są nieparzyste. W pierwszym przypadku mamy $x - z = (x - y) + (y - z)$. Suma liczb podzielnych przez k jest podzielna przez k, więc $\langle x, z \rangle \in \rho_k$. W drugim przypadku $x \cdot z = (x \cdot y) \cdot (y \cdot z) \cdot \frac{1}{y^2} > 0$ i też dobrze.
228b: Wszystkie klasy abstrakcji naszej relacji są nieskończone. Jeśli a jest liczbą nieparzystą, to $[a]_{\rho_k} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b > 0\}$ albo $[a]_{\rho_k} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b < 0\}$. A jeśli a jest parzyste, to $[a]_{\rho_k} = \{a + nk \mid n \in \mathbb{Z} \text{ i } nk \text{ jest parzyste}\}$. A więc nie ma klasy k-elementowej.
228c: Jeśli $k = 4$ to mamy 4 klasy abstrakcji:

- Klasę liczb nieparzystych dodatnich;
- Klasę liczb nieparzystych ujemnych;
- Klasę liczb podzielnych przez 4;
- Klasę liczb parzystych niepodzielnych przez 4.

W przypadku $k = 3$ jest pięć klas:

- Klasa liczb nieparzystych dodatnich;
- Klasa liczb nieparzystych ujemnych;
- Klasa liczb parzystych podzielnych przez 3;
- Klasa liczb parzystych dających resztę 1 z dzielenia przez 3;
- Klasa liczb parzystych dających resztę 2 z dzielenia przez 3.

229a: Przykładem funkcji $f : \mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$, która nie jest postaci $\Phi(T)$, dla żadnego T, jest funkcja określona warunkiem

$$f(A) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{jeśli } A = \emptyset; \\ \emptyset, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

[4] Dziękuję dr. Piotrowi Hoffmanowi za przygotowanie niektórych rozwiązań

b: Jeśli $T = \{\langle\{x\}, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$, to $\Phi(T) = \mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$, bo wtedy $\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid \{x\} \subseteq a\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in a\} = a$. Aby uzyskać funkcję stałą musimy przyjąć $T = \{\langle\emptyset, x\rangle \mid x \in A\}$, dla wybranego A. Wtedy $\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A\} = A$.
c: Przypuśćmy, że $\Phi(T) = \Phi(S)$ i przy tym $T \neq S$, na przykład $\langle a, x\rangle \in T - S$. Skoro x należy do $\Phi(T)(a) = \Phi(S)(a)$, to $\langle b, x\rangle \in S$ dla pewnego $b \subseteq a$. Stąd $x \in \Phi(S)(b) = \Phi(T)(b)$, więc jest takie $c \subseteq b$, że $\langle c, x\rangle \in T$. Wtedy $c \subseteq a$, więc $c = a$. Zatem $\langle a, x\rangle = \langle c, x\rangle \in S$ i mamy sprzeczność.

230a: Obraz zbioru a przy funkcji $h : b \to c$ to zbiór $\vec{h}(a) = \{z \in c \mid \exists y(y \in a \wedge f(y) = z\}$. Na przykład jeśli $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dana wzorem $f(n) = \min(2n, 7)$, to obrazem zbioru $\{1, 3, 5, 6\}$ jest zbiór $\{2, 6, 7\}$.
230b: Klasa abstrakcji relacji s wyznaczona przez b to zbiór $[b]_s = \{x \in a \mid \langle x, b\rangle \in s\}$. Na przykład klasa abstrakcji relacji $s = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |m - n|$ dzieli się przez $7\}$ wyznaczona przez 17 składa się ze wszystkich liczb, które dają resztę 3 przy dzieleniu przez 7.
230c: Produkt uogólniony rodziny $\{a_T\}_{T\in t}$ to zbiór $\prod_{T\in t} a_T$ złożony ze wszystkich funkcji f spełniających warunki

$$\mathrm{Dom}(f) = t; \qquad \forall T(T \in t \to f(T) \in a_T).$$

Na przykład gdy $a_n = \{0, \dots, n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ to produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ to zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniających dla wszystkich n warunek $f(n) \leq n$.
230d: Zupełny porządek częściowy to taki porządek częściowy, w którym każdy podzbiór skierowany ma kres górny. Na przykład zbiór wszystkich funkcji częściowych z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ gdzie $f \leq g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ oraz $f(n) = g(n)$ dla dowolnego $n \in \mathrm{Dom}(f)$.
230e: Kres górny podzbioru a w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle b, \leq\rangle$ to najmniejsze ograniczenie górne tego zbioru, tj. taki element x, który spełnia warunki:

- $\forall y(y \in a \to y \leq x)$;
- $\forall z(\forall y(y \in a \to y \leq z) \to z \leq x)$.

230f: Zbiór dobrze ufundowany to taki zbiór częściowo uporządkowany, w którym każdy niepusty podzbiór ma element minimalny.

231a: Funkcja F jest „na", bo $f = F(f, f)$, dla dowolnego $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
231b: To nie jest funkcja różnowartościowa. Jeśli przez $\mathbf{n}$ oznaczymy funkcję stale równą n, to $F(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = F(\mathbf{0}, \mathbf{2})$.
231c: Zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra jest oczywiście równoliczny ze zbiorem wartości funkcji. Ponieważ funkcja jest „na", więc w tym wypadku jest to zbiór mocy $\overline{\overline{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}} = \mathfrak{C}$.
231d: Klasy abstrakcji tej relacji to przeciwobrazy zbiorów jednoelementowych. Każdy taki przeciwobraz $F^{-1}(\{f\})$ jest mocy continuum. Z jednej strony jest on zawarty w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ więc jest mocy co najwyżej $\mathfrak{C}$. Z drugiej strony, do $F^{-1}(\{f\})$ należą wszystkie pary postaci $\langle f, f + g\rangle$, gdzie g jest dowolną funkcją z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. (Oczywiście przez $f + g$ rozumiemy funkcję określoną wzorem $(f+g)(n) = f(n)+g(n)$.) Ponieważ zbiór par postaci $\langle f, f+g\rangle$ jest mocy continuum, więc moc naszej klasy jest co najmniej taka. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że każda klasa ma moc $\mathfrak{C}$.

232: Rozpatrzmy rodzinę S wszystkich skierowanych podzbiorów zbioru częściowo uporządkowanego $\langle A, \leq\rangle$. Mamy udowodnić, że zbiór S (uporządkowany przez inkluzję) ma element maksymalny. Należy w tym celu pokazać, że suma każdego łańcucha L zbiorów skierowanych

jest zbiorem skierowanym. Wówczas bowiem suma łańcucha L jest jego ograniczeniem górnym w S i można zastosować lemat Kuratowskiego-Zorna.
Przypuśćmy więc, że $a, b \in \bigcup L$. Wtedy $a \in A$, $b \in B$, dla pewnych $A, B \in L$. Jeden z tych zbiorów jest zawarty w drugim, bo L jest łańcuchem. Jeśli na przykład $A \subseteq B$ to $a, b \in B$ i musi istnieć takie $c \in B$, że $a, b \leq c$. Oczywiście $c \in \bigcup L$, więc pokazaliśmy, że a i b mają wspólne ograniczenie w $\bigcup L$. A więc $\bigcup L$ faktycznie jest zbiorem skierowanym.

233a: Funkcja f jest monotoniczna (bo jest ciągła), więc $f(a) \geq f(p) = p$, dla dowolnego $p \in P$. Zatem $f(a)$ jest ograniczeniem górnym zbioru P i mamy $a \leq f(a)$. Dalej przez indukcję wynika, że elementy $f^n(a)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, tworzą ciąg wstępujący. Niech b będzie kresem górnym tego ciągu (w kracie K). Wówczas

$$f(b) = f(\sup\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}) = \sup\{f^{n+1}(a) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\} = b,$$

a więc b jest punktem stałym. Przy tym b jest najmniejszym punktem stałym większym lub równym a. Jeśli bowiem $c \geq a$ jest punktem stałym, to łatwo pokazać przez indukcję, że $c \geq f^n(a)$ dla dowolnego n, i w konsekwencji $c \geq b$.
233b: Nie. Na przykład weźmy taką funkcję $f : \mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$:

$$f(X) = \begin{cases} X, & \text{jeśli } \overline{\overline{X}} \leq 1; \\ X \cup \{7\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}.$$

Wtedy każdy zbiór jednoelementowy jest punktem stałym funkcji f. Jeśli teraz $P = \{\{2\}, \{3\}\}$, to kresem zbioru P w kracie $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ jest zbiór $\{2, 3\}$, który nie jest punktem stałym.
233c: Tak. W pierwszej części zadania mowa o tym, że każdy podzbiór P zbioru S ma kres górny w S.

234a: Nieprawda. Trzeba wstawić „*różnowartościowym*".
234b: Nieprawda. Trzeba wstawić „*i nie są w relacji d*".
234c: Nieprawda. Trzeba wstawić „*o skończonym rozgałęzieniu*".
234d: Prawda. Jeśli wszystkie zbiory są niepuste, i nieskończenie wiele z nich ma przynajmniej dwa elementy to produkt musi być nieprzeliczalny.
234e: Prawda. W kracie zupełnej wystarczy nawet aby przekształcenie było monotoniczne.
234f: Nieprawda. Trzeba wstawić „*niepustym*".
234g: Nieprawda. Trzeba wstawić „*nieskończonym*".
234h: Prawda. Nie tylko przedział w $\mathbb{R}$, ale w ogóle każdy zbiór można dobrze uporządkować.

235: Niech Z oznacza zbiór wszystkich dobrze ufundowanych częściowych porządkow w $\mathbb{N}$. Oczywiście $\overline{\overline{Z}} \leq \mathfrak{C}$, bo $Z \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Aby udowodnić nierówność $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{Z}}$ określimy funkcję $F : \mathbf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) \xrightarrow{1-1} Z$. Dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ przyjmiemy

$$F(A) = \{\langle a, 0 \rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

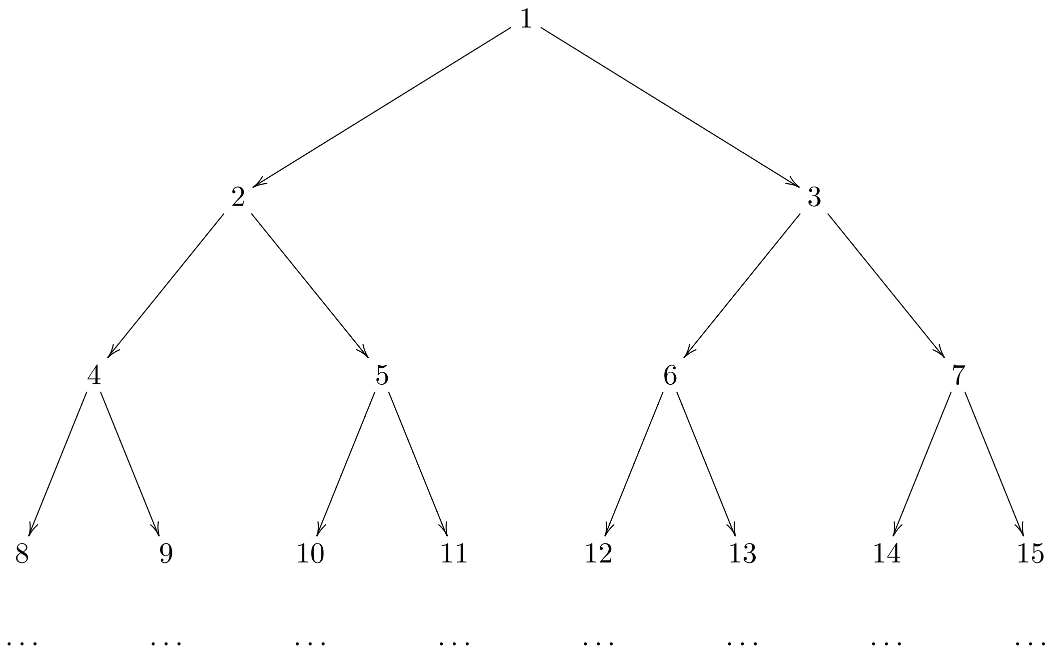
Relacja $F(A)$ jest dobrym ufundowaniem zbioru $\mathbb{N}$ (łańcuchy są co najwyżej dwuelementowe). Ponadto jeśli $A \neq B$, np. jeśli $a \in A - B$, to $\langle a, 0 \rangle \in F(A) - F(B)$, więc funkcja faktycznie jest różnowartościowa. Z nierówności $\overline{\overline{Z}} \leq \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{Z}}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika równość.

236a: Nie. Na przykład funkcje g_0 i g_1 (zob. część 236e) nie są porównywalne.
236b: Nie. Na przykład takie funkcje f_n tworzą ciąg malejący:

$$f_n(m) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } m \leq n; \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

236c: Tak. Jest izomorficzny z $\langle \mathbf{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$.
236d: Tak. Ciąg malejący (część 236b) jest oczywiście nieskończonym łańcuchem.

236e: Tak, na przykład zbiór $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie
$$g_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } m = n; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$
236f: Tak. Wystarczy oczywiście wskazać nieprzeliczalny antyłańcuch w $\langle\, \mathbf{P}(\mathbb{N}), \subseteq \,\rangle$ (por. część 236c). Dla dowolnego ciągu $\alpha : \mathbb{N} \to 0, 1$ skonstruujemy przez indukcję ściśle rosnącą funkcję $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Przyjmujemy $f_\alpha(0) = 1$, oraz
$$f_\alpha(n+1) = \begin{cases} 2f_\alpha(n), & \text{jeśli } \alpha(n) = 0; \\ 2f_\alpha(n) + 1, & \text{jeśli } \alpha(n) = 1. \end{cases}$$
Jeśli teraz $A_\alpha = \mathrm{Rg}(f_\alpha)$, to zbiory A_α tworzą antyłańcuch. Istotnie, niech $\alpha \neq \beta$ i niech $m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \alpha(k) \neq \beta(k)\}$. Wtedy mamy $f_\alpha(m+1) \in A_\alpha - A_\beta$ oraz $f_\beta(m+1) \in A_\beta - A_\alpha$. Zbiory A_α odpowiadają nieskończonym krawędziom drzewa na rysunku.
236g: Funkcje f_α z części 236f tworzą nieprzeliczalny łańcuch w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.



237: Należy udowodnić, że rodzina $Z = \{B \subseteq A \mid \text{żadne trzy punkty w B nie są współliniowe}\}$ ma element maksymalny. W tym celu rozpatrzmy dowolny łańcuch $Ł$ w Z. Suma tego łańcucha należy do Z. Jeśli bowiem $a, b, c \in \bigcup Ł$ to każdy z tych punktów należy do pewnego zbioru z łańcucha $Ł$. Jeden z tych trzech zbiorów zawiera pozostałe (bo przecież $Ł$ jest łańcuchem) więc punkty a, b, c nie mogą być współliniowe.
Skoro $\bigcup Ł \in Z$ to $\bigcup Ł$ jest ograniczeniem górnym łańcucha $Ł$. A więc pokazaliśmy, że dowolny łańcuch w Z ma ograniczenie górne. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika istnienie elementu maksymalnego. Jest to zbiór spełniający warunki zadania.

238a: Tak. Jeśli $Z \neq Y$, na przykład $Z \not\subseteq Y$, to istnieje element $z \in Z$, który nie należy do Y. Wtedy $\{z\} R_Z \emptyset$, ale $\langle\, \{z\}, \emptyset \,\rangle \notin R_Y$. Zatem $R_Z \neq R_Y$.
238b: Nie. Zauważmy bowiem, że klasa abstrakcji $[Z]_{R_Z}$ to zawsze zbiór $\mathbf{P}(Z)$. Mamy bowiem $\langle\, X, Z \,\rangle \in R_Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \cup Z = Z$, czyli gdy $X \subseteq Z$. Rozpatrzmy teraz podział zbioru $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ na dwie składowe: jedna z nich to zbiór $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$ a do drugiej należą wszystkie pozostałe podzbiory $\mathbb{N}$. Relacja równoważności wyznaczona przez ten podział nie jest postaci R_Z (a więc nie jest wartością funkcji f), bo żaden ze zbiorów naszego podziału

nie jest postaci $\mathbf{P}(Z)$. Pierwszy dlatego, że ma 3 elementy, drugi dlatego, że nie należy do niego zbiór pusty.

239: Niech $f(0) = 0$ oraz $f(n) = n - 1$, gdy $n > 0$. Jeśli teraz $X = \{0\}$, to mamy $g(i) = f^{-i}(\{0\}) = \{n \mid f^i(n) = 0\} = \{0, \ldots, i\}$. A zatem $g(i) \neq g(j)$, dla $i \neq j$.

243a: Niech dla $n \in \mathbb{N}$ funkcja $f_n : \mathbb{N} \to 2$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $\{n\}$, tzn. niech $f_n(k) = 1$, gdy $k = n$, a $f_n(k) = 0$, gdy $k \neq n$. Niech $F = \{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Wtedy F rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$. Weźmy bowiem dowolne dwie różne liczby naturalne i oznaczmy większą przez x, a mniejszą przez y (zatem $x > 0$). Wtedy $f_x(x) = 1$, zaś $f_x(y) = 0$, a zarazem $f_x \in F$. Zbiór F jest także minimalnym zbiorem rozróżniającym $\mathbb{N}$. Weźmy bowiem dowolny jego podzbiór F_0 rozróżniający $\mathbb{N}$ oraz dowolne naturalne $n > 0$. Wiemy, że istnieje takie naturalne $x > 0$, że $f_x \in F_0$ oraz $f_x(0) \neq f_x(n)$. Ponieważ $f_x(0) = 0$, więc $f_x(n) = 1$, a zatem $x = n$. Dowodzi to, że dla każdego naturalnego $n > 0$ mamy $f_n \in F_0$. A zatem $F_0 = F$.

243b: Niech $F = \{f : \mathbb{N} \to 2 \,|\, f(0) = f(1)\}$. Zbiór F nie rozróżnia zbioru $\mathbb{N}$, ponieważ dla każdego $f \in F$ zachodzi $f(0) = f(1)$. Niech F' będzie dowolnym nadzbiorem F nie rozróżniającym $\mathbb{N}$ i niech g będzie dowolnym jego elementem. Istnieją różne liczby naturalne x, y takie, że dla każdego $f \in F'$ zachodzi $f(x) = f(y)$, gdyż w przeciwnym razie F' rozróżniałby $\mathbb{N}$. Jeżeli $x > 1$, to $f_x \in F$ oraz $f_x(x) = 1$ jest różne od $f_x(y) = 0$. Podobnie jeśli $y > 1$. A zatem $x = 1$ i $y = 0$ lub $x = 0$ i $y = 1$. Skoro $g \in F'$, to $g(x) = g(y)$, a więc $g(0) = g(1)$. Zatem $g \in F$. Dowodzi to, że $F' = F$.

243c: Zbiór F z części 243a rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$ i jest mocy $\aleph_0$. Ponieważ dla dowolnej mocy nieskończonej $\mathfrak{m}$ zachodzi $\mathfrak{m} + \aleph_0 = \mathfrak{m}$, więc moc zbioru $2^{\mathbb{N}} - F$ jest równa continuum. Ponieważ każdy zbiór postaci $F \cup G$, gdzie $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} - F$, rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$, więc rodzina tych podzbiorów zbioru $2^{\mathbb{N}}$, które rozróżniają całe $\mathbb{N}$ jest mocy co najmniej $2^{\mathfrak{c}}$. Ta rodzina jest więc dokładnie mocy $2^{\mathfrak{c}}$, bo jest zawarta w zbiorze $P(2^{\mathbb{N}})$, który też jest mocy $2^{\mathfrak{c}}$.

243d: Rozważamy uporządkowany przez inkluzję zbiór Z wszystkich tych $A \subseteq X$, których elementy rozróżnia zbiór F. Zauważmy, że nasz zbiór spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, tj. suma dowolnego łańcucha zbiorów należących do Z sama należy też do Z. (Istotnie, jeśli x, y są elementami sumy łańcucha L to $x \in A$, $y \in B$, dla pewnych $A, B \in L$. Jeden ze zbiorów A, B zawiera drugi, a zatem oba elementy x, y do niego należą, istnieje więc pożądana funkcja.) Istnienie elementu maksymalnego rodziny Z wynika więc z lematu Kuratowskiego-Zorna.

244: Udowodnimy przez indukcję, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, określone są wszystkie wartości $h(f(i))$ dla $i \leq n$, oraz że dla $i, j \leq n$ zachodzi warunek $f(i) \leq f(j) \leftrightarrow h(f(i)) \leq h(f(j))$. Wynika stąd, że $h(f(i))$ jest dobrze określone dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Dla $n = 0$ teza jest oczywista, załóżmy więc, że $n > 0$, i że warunek zachodzi dla $i, j \leq n - 1$. Ustawmy wartości $f(i)$ dla $i \leq n - 1$ w ciąg rosnący $a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1}$. Zauważmy, że wartości $h(f(i))$ tworzą wtedy też ciąg rosnący $h(a_0) < h(a_1) < \cdots < h(a_{n-1})$. Liczba $f(n)$ należy do jednego z przedziałów $(-\infty, a_0), (a_0, a_1), \ldots, (a_{n-2}, a_{n-1}), (a_{n-1}, \infty)$, a wartość $h(f(n))$ jest określona, bo każdy z odpowiadających im w $\mathbb{Q}^+$ przedziałów $(0, b_0), (b_0, b_1), \ldots, (b_{n-2}, b_{n-1}), (b_{n-1}, \infty)$ jest niepusty. A więc funkcja jest dobrze określona.

Dla dowolnego n, liczby $b \in \mathbb{Q}^+$ spełniające warunek

$$\forall i < n\, [f(i) \leq f(n) \leftrightarrow h(f(i)) \leq b]\},$$

nazwiemy liczbami *dozwolonymi dla n*. Można więc powiedzieć, że $h(f(n))$ to liczba dozwolona dla n, o najmniejszym możliwym numerze.

Przypuśćmy, że nasza funkcja nie jest surjekcją, i niech m będzie najmniejszą taką liczbą, że $g(m)$ nie jest wartością funkcji h. Ustawmy w ciąg rosnący $b_0 < b_1 < \cdots < b_{m-1}$ liczby $g(i)$ dla $i < m$. Wtedy $h(a_i) = b_i$, dla pewnych liczb $a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1}$. Niech $a_i = f(n_i)$ dla $i < m$. Liczba $g(m)$ należy do jednego z przedziałów $(0, b_0), (b_0, b_1), \ldots, (b_{m-2}, b_{m-1}), (b_{m-1}, \infty)$, powiedzmy do przedziału (b_i, b_{i+1}). (Pozostałe przypadki są analogiczne.) Wybierzmy najmniejszą taką liczbę k, że $f(k)$ należy do przedziału (a_i, a_{i+1}). Wartość $h(f(k))$ należy do przedziału (b_i, b_{i+1}), a skoro jest różna od $g(m)$ i wszystkich $b(i)$, więc musi być postaci $g(n)$ dla pewnego $n > m$.

Mamy teraz dwie możliwości. Jeśli k jest większe od obu liczb n_i, n_{i+1}, to liczby dozwolone dla k są zawarte w przedziale (b_i, b_{i+1}), a więc nierówność $n > m$ jest sprzeczna z definicją funkcji h. Jeśli zaś k jest mniejsze od jednej z nich, na przykład od n_i, to wartość $b_i = g(l)$ jest dozwolona dla k, a tymczasem $l < m < n$. To też jest sprzeczne z definicją funkcji h.

245: Niech $F : A \xrightarrow{\text{na}} 2^A$, i niech

$$f(a) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } F(a)(a) = 0; \\ 0, & \text{jeśli } F(a)(a) = 1 \end{cases}$$

Skoro F jest surjekcją więc $f = F(b)$ dla pewnego b i mamy sprzeczność:

$$f(b) = 1 \leftrightarrow f(b) = 0.$$

246: Funkcja ϕ nie jest różnowartościowa. Jeśli na przykład $f(x) = x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $\phi(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \phi(f) = \mathbb{IQ}$. Natomiast $\phi : \mathbb{R}^\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbf{P}(\mathbb{R})$, bo dla dowolnego $B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $B = \phi(f)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{jeśli } x \in B, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

247: Zbiór F jest mocy $2^\mathfrak{C}$. Nierówność $\overline{\overline{F}} \leq 2^\mathfrak{C}$ wynika stąd, że $F \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$, a ten ostatni zbiór ma moc $\mathfrak{C}^\mathfrak{C} = 2^\mathfrak{C}$. Aby wykazać, że $\overline{\overline{F}} \geq 2^\mathfrak{C}$, zauważmy najpierw, że zbiór $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}-\mathbb{N}}$ jest także mocy $2^\mathfrak{C}$, bo $\overline{\overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}} = \mathfrak{C}$. Funkcja $\xi : \mathbb{Q}^{\mathbb{R}-\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} F$ może zaś być określona warunkiem

$$\xi(f)(x) = \begin{cases} \pi, & \text{jeśli } x \in \mathbb{N}, \\ f(x), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

248: Zbiór jest jednocześnie D-łatwy i D-trudny, wtedy i tylko wtedy, gdy jest maksymalnym zbiorem D-łatwym (tj. elementem maksymalnym rodziny wszystkich zbiorów D-łatwych, uporządkowanej przez inkluzję). Rodzina ta spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, jeśli bowiem L jest łańcuchem zbiorów D-łatwych, to $\bigcup L$ też jest zbiorem D-łatwym, (a jako taki, stanowi ograniczenie górne łańcucha). Istotnie, jeśli $x, y \in \bigcup L$, to istnieją takie $V_1, V_2 \in L$, że $x \in V_1$ i $y \in V_2$. Ponieważ L jest łańcuchem, więc $V_{2-i} \subseteq V_i$ dla $i = 1$ lub $i = 2$. Wtedy $x, y \in V_i$, skąd wynika pożądana własność $(x + y)^3 - 2xy \in D$.

Z powyższego wynika, że dla każdego D, do rodziny wszystkich zbiorów D-łatwych stosuje się lemat Kuratowskiego-Zorna, a więc maksymalny zbiór D-łatwy istnieje zawsze.

249: Ponieważ zbiór pusty jest łańcuchem, więc istnieje $\inf \emptyset$, czyli największy element zbioru A. Oznaczmy go przez $\top$. Dalej zauważmy, że funkcja f jest monotoniczna. Jeśli bowiem $a \leq b$ to zbiór $\{a, b\}$ tworzy łańcuch o kresie dolnym a. Zatem $f(a)$ jest kresem dolnym dla $\{f(a), f(b)\}$, czyli $f(a) \leq f(b)$.

Niech $a_k = f^k(\top)$. Z monotoniczności funkcji f wynika, że ciąg a_k jest zstępujący: $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \ldots$ Zbiór $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ jest więc łańcuchem i ma kres dolny a_ω. Z założenia o f mamy teraz

$f(a_\omega) = \inf\{f^{k+1}(\top) \mid k \in \mathbb{N}\} = \inf\{f^k(a_k) \mid k \in \mathbb{N}\} = a_\omega$. A więc a_ω jest punktem stałym f. Jeśli b jest innym punktem stałym, to oczywiście $b \leq \top$. Przez indukcję łatwo udowodnić, że $b = f^k(b) \leq f^k(\top) = a_k$ skąd b jest ograniczeniem dolnym zbioru $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. A zatem $b \leq a_\omega$, bo a_ω jest kresem dolnym tego zbioru.

250: Funkcja ϕ nie jest różnowartościowa. Jeśli na przykład $f(x) = x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $\phi(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \phi(\mathrm{f}) = \mathbb{IQ}$. Aby wykazać, że $\phi : \mathbb{R}^\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbf{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$, zauważmy, że dla każdego niepustego zbioru $B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $\overline{\overline{B}} \leq \mathfrak{C}$. Istnieje więc funkcja $f_B : \mathbb{IQ} \xrightarrow{\text{na}} B$. Wtedy $\phi(f) = B$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} f_B(x), & \text{jeśli } x \in \mathbb{IQ}, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku:} \end{cases}$$

251: Żadna z tych relacji nie jest relacją równoważności, bo żadna nie jest zwrotna. Z zadania 246 wynika, że $\phi(f) = \emptyset$ dla pewnej funkcji f. Wtedy oczywiście $\langle f, f \rangle \notin r$. Mamy też $\phi(f) \times \phi(f) = \emptyset$, a skoro zbiór pusty nie jest relacją równoważności w $\mathbb{R}$, to $\langle f, f \rangle \notin s$.

252: Zbiór G jest mocy $\aleph_0$. Oczywiście $\overline{\overline{B}} = \aleph_0$, więc $\overline{\overline{G}} \geq \aleph_0$, bo $B \subseteq G$. Pokażemy, że $\overline{\overline{G}} \leq \aleph_0$. Niech H będzie zbiorem tych ciągów z $\{0,1\}^\mathbb{N}$, w których występuje tylko skończenie wiele jedynek. Jako przeliczalna suma przeliczalnych zbiorów

$$H_k = \{a \in \{0,1\}^\mathbb{N} \mid \forall n \geq k.\, a(n) = 0\},$$

zbiór H sam jest zbiorem przeliczalnym. Ponadto $G \subseteq H$. Istotnie, każda wesoła transformacja zmienia ciąg w co najwyżej dwóch miejscach, aby więc w skończonej liczbie kroków otrzymać element zbioru B, trzeba zacząć od ciągu, który od pewnego miejsca ma same zera.

253: Zbiór wzorcowy to maksymalny element rodziny $\mathcal{R}$ wszystkich zbiorów o elementach parami niewspółmiernych, uporządkowanej przez inkluzję. Łańcuch takich zbiorów jest ograniczony z góry w $\mathcal{R}$ przez swoją sumę — jest ona bowiem elementem $\mathcal{R}$. Istotnie, jeśli liczby x, y należą do sumy takiego łańcucha, to każda z nich należy do pewnego składnika sumy, powiedzmy, że $x \in S$ i $y \in T$. Ponieważ jednak T i S są elementami łańcucha, mamy $S \subseteq T$ lub $T \subseteq S$, a więc obie liczby x i y należą do tego samego składnika i muszą być niewspółmierne.

Z powyższego wynika, że rodzina $\mathcal{R}$ spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, a więc ma element maksymalny — zbiór wzorcowy.

254: Zbiór Ku jest mocy $\aleph_0$, jest gęsty i nie ma elementu pierwszego ani ostatniego, a więc jest izomorficzny ze zbiorem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (uporządkowanym tak jak zwykle). Niech $f : Ku \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$ będzie odpowiednim izomorfizmem. Dla $er \in Er$ przez $er{\downarrow}$ oznaczymy zbiór $\{ku \in Ku \mid ku < er\}$.

Rozpatrzmy przekształcenie $F : Er \to \mathbb{R}$, dane wzorem $F(er) = \sup \vec{f}(er{\downarrow})$. Przekształcenie to jest różnowartościowe, bo jeśli $x < y$ to $x < ku_1 < ku_2 < y$ dla pewnych $ku_1, ku_2 \in Ku$. Wtedy dla dowolnego $d \in x{\downarrow}$ mamy $f(d) < f(ku_1)$, skąd $F(x) \leq f(ku_1) < f(ku_2) \leq F(y)$.

Analogicznie, jeśli $G(r) = \sup \vec{f}^{-1}(\{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\})$ dla $r \in \mathbb{R}$, to $G : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} Er$. Dowód jest w zasadzie taki sam. A więc pokazaliśmy, że $\overline{\overline{Er}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ oraz $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{Er}}$. Zatem $\overline{\overline{Er}} = \mathfrak{C}$.

255a: Nie. Jeśli $\mathrm{id}_\mathbb{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest funkcją identycznościową to zawsze $\Phi(\mathrm{id}_\mathbb{N})(A) = A$. Ale dla funkcji następnika s mamy także $\Phi(s)(A) = A$, dla dowolnego A. Istotnie,

$$\begin{aligned}\Phi(s)(A) &= \vec{f}^{\,-1}(\{s(n) \mid n \in A\}) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(s(m) = s(n))\} = \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(m = n)\} = A.\end{aligned}$$

A więc $\Phi(\mathrm{id}_\mathbb{N}) = \Phi(s)$, chociaż $\mathrm{id}_\mathbb{N} \neq s$.

255b: Nie. Nietrudno zauważyć, że jeśli $A \neq \emptyset$, to także $\vec{f}^{-1}(\vec{f}(A)) \neq \emptyset$. Zatem na przykład funkcja stała $F : \mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$, określona warunkiem $F(A) = \emptyset$, nie jest wartością funkcji Φ.

255c: Zauważmy, że $\Phi^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}\}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall A \subseteq \mathbb{N}\,(\vec{f}^{-1}(\vec{f}(A)) = A)\}$. Warunek $\forall A \subseteq \mathbb{N}\,(\vec{f}^{-1}(\vec{f}(A)) = A)$ zachodzi zaś wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją różnowartościową. Mamy bowiem $\vec{f}^{-1}(\vec{f}(A)) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(f(n) = f(m))\}$. Dla różnowartościowej funkcji f, równość $f(n) = f(m)$ zachodzi tylko dla $n = m$ i mamy

$$\vec{f}^{-1}(\vec{f}(A)) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(n = m)\} = A.$$

W przeciwnym razie $f(n) = f(m)$ dla pewnych $n \neq m$, więc $\{n\} \subsetneq \{n, m\} \subseteq \vec{f}^{-1}(\vec{f}(\{n\}))$. A zatem $\vec{\Phi}^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}\})$ to zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$.

255d: Na początek zauważmy, że $n \in \Phi(f)(A)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) \in \vec{f}(A)$, czyli gdy $f(n) = f(m)$ dla pewnego $m \in A$. Przyjmując więc $r = \{\langle x, y \rangle \mid f(x) = f(y)\}$, łatwo otrzymujemy równoważność

$$n \in \Phi(f)(A) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists m \in A\,(n \in [m]_r),$$

z której natychmiast wynika teza.
Relacja r to jądro funkcji f, czyli $r = \{\langle x, y \rangle \mid f(x) = f(y)\}$. Aby udowodnić, że $\Phi(f)(A) = \bigcup\{[a]_r \mid a \in A\}$, załóżmy najpierw, że $n \in \Phi(f)(A)$. Oznacza to, że $f(n) \in \vec{f}(A)$, czyli że $f(n) = f(m)$ dla pewnego $m \in A$. Wtedy $n \in [m]_r$, a zatem n należy do sumy po prawej stronie. Jeśli zaś założymy, że n jest elementem tej sumy, to $n \in [m]_r$, dla pewnego $m \in A$, czyli właśnie $f(m) = f(n)$.

256: Każdemu wielomianowi f można przypisać funkcję $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, która liczbie n przypisuje współczynnik wielomianu f przy x^n. A więc zbiór wszystkich wielomianów jest mocy co najwyżej takiej jak zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, czyli $\mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. Ponieważ zbiór wszystkich wielomianów stałych jest $\mathfrak{C}$, więc zbiór wszystkich wielomianów jest też mocy $\mathfrak{C}$. Stąd od razu wynika, że każda klasa abstrakcji relacji r i zbiór wszystkich klas są mocy co najwyżej $\mathfrak{C}$.
Niech $f = a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Do klasy $[f]_r$ należą wszystkie wielomiany postaci $f = a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + b$, gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą. Zatem klasa $[f]_r$ jest co najmniej (a więc dokładnie) mocy $\mathfrak{C}$.
Dla $a \neq b$ wielomiany ax^3 i bx^3 nie są w relacji, bo ich różnica jest stopnia 3. Zatem zbiór klas abstrakcji też jest mocy $\mathfrak{C}$.

257. Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{T}$ złożoną ze wszystkich takich podzbiorów T zbioru B, że

$$|x - y| \geq \tfrac{1}{2}(|x - A| + |y - A|),$$

dla dowolnych różnych $x, y \in T$. Rodzina $\mathcal{T}$, uporządkowana przez inkluzję, jest niepusta (bo każdy jednoelementowy podzbiór B należy do $\mathcal{T}$) i spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Niech bowiem L będzie łańcuchem w $\mathcal{T}$ i niech $U = \bigcup L$. Jeśli $x, y \in U$, to istnieją takie $T, T' \in \mathcal{T}$, że $x \in T$ i $y \in T'$. Skoro L jest łańcuchem, to albo $T \subseteq T'$ albo $T' \subseteq T$. W obu przypadkach liczby x, y należą do tego samego zbioru z rodziny $\mathcal{T}$, więc ich różnica spełnia warunek powyżej.
Pokazaliśmy więc, że suma dowolnego łańcucha w $\mathcal{T}$ należy do $\mathcal{T}$. A zatem każdy łańcuch w $\mathcal{T}$ jest ograniczony z góry. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wnioskujemy, że istnieje maksymalny element T rodziny $\mathcal{T}$. Zbiór T spełnia pierwszy warunek wymieniony w zadaniu, bo należy do $\mathcal{T}$. Spełnia też drugi warunek, bo jest maksymalny: jeśli $x \in B - T$, to zbiór $T \cup \{x\}$ nie należy już do $\mathcal{T}$.

258. Każdy zbiór jest sumą rodziny swoich skończonych podzbiorów i na dodatek ta rodzina jest skierowana i niepusta. Zatem natychmiast z ciągłości wynika warunek

$$f(a) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq a\}.$$

Dla dowodu implikacji odwrotnej załóżmy, że S jest skierowanym podzbiorem $P(\mathbb{N})$. Kresem górnym w $P(\mathbb{N})$ jest oczywiście suma, więc równość $\sup \overrightarrow{f}(S) = f(\sup S)$ sprowadza się do równości

$$\bigcup\{f(s) \mid s \in S\} = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq \bigcup S\}.$$

Oznaczmy lewą i prawą stronę tej równości przez LS i PS. Przypuśćmy, że $x \in \mathrm{LS}$. Wtedy $x \in f(s)$ dla pewnego $s \in S$, ale $f(s) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq s\}$, więc $x \in f(e)$, gdzie e jest skończony i $e \subseteq s \subseteq \bigcup S$. Zatem $x \in \mathrm{PS}$. Na odwrót, jeśli $x \in \mathrm{PS}$, to $x \in f(e)$, gdzie $e = \{y_1, \ldots, y_k\}$ jest skończonym podzbiorem $\bigcup S$. Istnieją takie $s_1, \ldots, s_k \in S$, że $y_1 \in s_1, \ldots, y_k \in s_k$. Zbiór S jest skierowany, więc istnieje też takie $s \in S$, że $s_1, \ldots, s_k \subseteq s$. Mamy więc $e \subseteq s$. Ponieważ $f(s) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq s\}$, więc $f(e) \subseteq f(s)$ i ostatecznie $x \in f(s)$.

259a: $X = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.

259b: Istnieje $f : X \xrightarrow{1-1} Y$ ale nie istnieje $f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$.

259c: Istnieje takie $a \in A$, że $X = \{b \in A \mid b\,r\,a\}$.

259d: X jest elementem najmniejszego zbioru induktywnego, tj. najmniejszego zbioru $\mathbb{N}$ o własnościach:

- $\emptyset \in \mathbb{N}$;
- Dla dowolnego a, jeśli $a \in \mathbb{N}$ to $a \cup \{a\} \in \mathbb{N}$.

259e: X jest równoliczny z pewną liczbą naturalną.

259f: $\langle X, \preceq \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym w taki sposób, że każdy niepusty podzbiór ma element minimalny.

259g: X jest częściowo uporządkowany tak, że każdy podzbiór skierowany ma kres górny.

259h: Istnieje taki element $a \in A$, że

- Dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $x \preceq a$;
- Jeśli dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $x \preceq b$, to $a \preceq b$.

259i: Istnieje taki zbiór A mocy $\mathfrak{m}$ i taki zbiór B mocy $\mathfrak{n}$, że X jest równoliczny z iloczynem kartezjańskim $A \times B$.

260: Funkcja przypisująca każdej liczbie n jej klasę abstrakcji $[n]_r$ jest na $\mathbb{N} - \{0\}/r$, więc zbiór ilorazowy jest mocy co najwyżej $\aleph_0$. Wystarczy więc sprawdzić, że nasz zbiór jest mocy co najmniej $\aleph_0$, czyli że istnieje nieskończenie wiele klas abstrakcji. Tak jest, bo każda liczba pierwsza wyznacza inną klasę abstrakcji, więc zbiór klas abstrakcji relacji r jest mocy $\aleph_0$.

261: Oczywiście $\overline{\overline{U}} \leq \mathfrak{C}$ bo zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Zdefiniujemy teraz funkcję $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to U$. Poniżej, $w_3(n)$ oznacza największe takie r, że n dzieli się przez 3^r.

$$F(f)(n) = \begin{cases} f(k), & \text{jeśli } n = 2k; \\ w_3(n), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja F jest dobrze określona, tj, $F(f) \in U$ dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bo dla dowolnego r istnieje nieskończenie wiele liczb nieparzystych, które w rozkładzie na czynniki pierwsze dają r trójek. Funkcja F jest też różnowartościowa, bo dla $f(k) \neq g(k)$ zachodzi $F(f)(2k) \neq F(g)(2k)$. A więc moc U jest co najmniej taka jak moc zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, z czego ostatecznie wynika $\overline{\overline{F}} = \mathfrak{C}$.