Klasówka ze wstępu do teorii mnogości
1 grudnia 2005

Niech $\Phi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbf{P}(\mathbb{N}))$ będzie taka, że

$$\Phi(f)(A) = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f}(A)),$$

dla wszystkich $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $A \subseteq \mathbb{N}$.

1. Czy funkcja Φ jest różnowartościowa?
2. Czy funkcja Φ jest na zbiór $\mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$?
3. Znaleźć przeciwobraz $\overrightarrow{\Phi}^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}\})$, gdzie $\mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}$ to funkcja identycznościowa z $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ do $\mathbf{P}(\mathbb{N})$.
4. Udowodnić, że dla dowolnego $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje taka relacja równoważności $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, że dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi

$$\Phi(f)(A) = \bigcup\{[a]_r \mid a \in A\}.$$

Rozwiązania

1. Nie. Jeśli $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest funkcją identycznościową to oczywiście zawsze $\Phi(\mathrm{id}_{\mathbb{N}})(A) = A$. Ale dla funkcji następnika s mamy także $\Phi(s)(A) = A$, dla dowolnego A. Istotnie,

$$\begin{aligned}\Phi(s)(A) = \overrightarrow{f}^{-1}(\{s(n) \mid n \in A\}) &= \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(s(m) = s(n))\} = \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(m = n)\} = A.\end{aligned}$$

A więc $\Phi(\mathrm{id}_{\mathbb{N}}) = \Phi(s)$, chociaż $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \neq s$.

2. Nie. Nietrudno zauważyć, że jeśli $A \neq \emptyset$, to także $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f}(A)) \neq \emptyset$. Zatem na przykład funkcja stała $F : \mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$, określona warunkiem $F(A) = \emptyset$, nie jest wartością funkcji Φ.

3. Zauważmy, że $\Phi^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}\}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall A \subseteq \mathbb{N}\,(\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f}(A)) = A)\}$. Warunek $\forall A \subseteq \mathbb{N}\,(\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f}(A)) = A)$ zachodzi zaś wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją różnowartościową. Mamy bowiem $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f}(A)) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(f(n) = f(m))\}$. Dla różnowartościowej funkcji f, równość $f(n) = f(m)$ zachodzi tylko dla $n = m$ i mamy

$$\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f}(A)) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(n = m)\} = A.$$

W przeciwnym razie $f(n) = f(m)$ dla pewnych $n \neq m$, więc $\{n\} \subsetneq \{n, m\} \subseteq \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f}(\{n\}))$. A zatem $\overrightarrow{\Phi}^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathbf{P}(\mathbb{N})}\})$ to zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$.

4. Na początek zauważmy, że $n \in \Phi(f)(A)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) \in \overrightarrow{f}(A)$, czyli gdy $f(n) = f(m)$ dla pewnego $m \in A$. Przyjmując więc $r = \{\langle x, y\rangle \mid f(x) = f(y)\}$, łatwo otrzymujemy równoważność

$$n \in \Phi(f)(A) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists m \in A\,(n \in [m]_r),$$

z której natychmiast wynika teza.