Egzamin ze wstępu do teorii mnogości
9 lutego 2006

1. W zbiorze $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych określamy relację równoważności r:

$$f \ r \ g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f - g \text{ jest funkcją liniową.}$$

   Znaleźć moc zbioru ilorazowego relacji r i moc każdej klasy abstrakcji.

2. Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ będą niepustymi zbiorami. Dla dowolnej liczby x przez $|x - A|$ oznaczamy odległość x od zbioru A, czyli $\inf\{|x - a| \mid a \in A\}$. Udowodnić, że istnieje podzbiór T zbioru B o takich własnościach:

   - Jeśli $x, y \in T$ oraz $x \neq y$ to $|x - y| \geq \frac{1}{2}(|x - A| + |y - A|)$;
   - Jeśli $x \in B - T$ to istnieje takie $y \in T$, że $|x - y| < \frac{1}{2}(|x - A| + |y - A|)$.

3. Udowodnić, że funkcja $f : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ jest ciągła (ze względu na inkluzję) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(a) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq a\},$$

   dla dowolnego $a \in P(\mathbb{N})$.

4. Objaśnić co to znaczy, że:

   (a) Zbiór X jest przeciwobrazem zbioru Y przy funkcji $f : A \to B$;
   (b) Moc zbioru X jest mniejsza od mocy zbioru Y;
   (c) Zbiór X jest klasą abstrakcji relacji równoważności r w zbiorze A;
   (d) Zbiór X jest liczbą naturalną;
   (e) Zbiór X jest skończony;
   (f) Zbiór X jest dobrze ufundowany przez relację $\preceq$;
   (g) Zbiór X jest zupełnym porządkiem częściowym;
   (h) Podzbiór X zbioru A ma kres górny w $\langle A, \preceq \rangle$;
   (i) Moc zbioru X jest iloczynem liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$.

Rozwiązania

1. Każdemu wielomianowi f można przypisać funkcję $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, która liczbie n przypisuje współczynnik wielomianu f przy x^n. A więc zbiór wszystkich wielomianów jest mocy co najwyżej takiej jak zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, czyli $\mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. Ponieważ zbiór wszystkich wielomianów stałych jest mocy $\mathfrak{C}$, więc zbiór wszystkich wielomianów jest też mocy $\mathfrak{C}$. Stąd od razu wynika, że każda klasa abstrakcji relacji r i zbiór wszystkich klas są mocy co najwyżej $\mathfrak{C}$.

Niech $f = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Do klasy $[f]_r$ należą wszystkie wielomiany postaci $f = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + b$, gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą. Zatem klasa $[f]_r$ jest co najmniej (a więc dokładnie) mocy $\mathfrak{C}$.

Dla $a \neq b$ wielomiany ax^3 i bx^3 nie są w relacji, bo ich różnica jest stopnia 3. Zatem zbiór klas abstrakcji też jest mocy $\mathfrak{C}$.

2. Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{T}$ złożoną ze wszystkich takich podzbiorów T zbioru B, że

$$|x - y| \geq \tfrac{1}{2}(|x - A| + |y - A|),$$

dla dowolnych różnych $x, y \in T$. Rodzina $\mathcal{T}$, uporządkowana przez inkluzję, jest niepusta (bo każdy jednoelementowy podzbiór B należy do $\mathcal{T}$) i spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Niech bowiem L będzie łańcuchem w $\mathcal{T}$ i niech $U = \bigcup L$. Jeśli $x, y \in U$, to istnieją takie $T, T' \in \mathcal{T}$, że $x \in T$ i $y \in T'$. Skoro L jest łańcuchem, to albo $T \subseteq T'$ albo $T' \subseteq T$. W obu przypadkach liczby x, y należą do tego samego zbioru z rodziny $\mathcal{T}$, więc ich różnica spełnia warunek powyżej.

Pokazaliśmy więc, że suma dowolnego łańcucha w $\mathcal{T}$ należy do $\mathcal{T}$. A zatem każdy łańcuch w $\mathcal{T}$ jest ograniczony z góry. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wnioskujemy, że istnieje maksymalny element T rodziny $\mathcal{T}$. Zbiór T spełnia pierwszy warunek wymieniony w zadaniu, bo należy do $\mathcal{T}$. Spełnia też drugi warunek, bo jest maksymalny: jeśli $x \in B - T$, to zbiór $T \cup \{x\}$ nie należy już do $\mathcal{T}$.

3. Każdy zbiór jest sumą rodziny swoich skończonych podzbiorów i na dodatek ta rodzina jest skierowana i niepusta. Zatem natychmiast z ciągłości wynika warunek

$$f(a) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq a\}.$$

Dla dowodu implikacji odwrotnej załóżmy, że S jest skierowanym podzbiorem $P(\mathbb{N})$. Kresem górnym w $P(\mathbb{N})$ jest oczywiście suma, więc równość $\sup \vec{f}(S) = f(\sup S)$ sprowadza się do równości

$$\bigcup\{f(s) \mid s \in S\} = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq \bigcup S\}.$$

Oznaczmy lewą i prawą stronę tej równości przez LS i PS. Przypuśćmy, że $x \in$ LS. Wtedy $x \in f(s)$ dla pewnego $s \in S$, ale $f(s) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq s\}$, więc $x \in f(e)$, gdzie e jest skończony i $e \subseteq s \subseteq \bigcup S$. Zatem $x \in$ PS. Na odwrót, jeśli $x \in$ PS, to $x \in f(e)$, gdzie $e = \{y_1, \ldots, y_k\}$ jest skończonym podzbiorem $\bigcup S$. Istnieją takie $s_1, \ldots, s_k \in S$, że $y_1 \in s_1, \ldots, y_k \in s_k$. Zbiór S jest skierowany, więc istnieje też takie $s \in S$, że $s_1, \ldots, s_k \subseteq s$. Mamy więc $e \subseteq s$. Ponieważ $f(s) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq s\}$, więc $f(e) \subseteq f(s)$ i ostatecznie $x \in f(s)$.