Klasówka ze wstępu do teorii mnogości

12 stycznia 2006

1. Relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$ jest określona tak:
$$\langle m, n\rangle \in r \quad \Longleftrightarrow \quad m \text{ i } n \text{ mają te same dzielniki pierwsze.}$$
Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są moce tych klas?

2. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *uporczywa*, gdy spełnia warunek
$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, (k > m \wedge f(k) = n).$$
Jakiej mocy jest zbiór U wszystkich funkcji uporczywych?

Rozwiązania

Zadanie 1: Funkcja przypisująca każdej liczbie n jej klasę abstrakcji $[n]_r$ jest na $\mathbb{N} - \{0\}/r$, więc zbiór ilorazowy jest mocy co najwyżej $\aleph_0$. Wystarczy więc sprawdzić, że nasz zbiór jest mocy co najmniej $\aleph_0$, czyli że istnieje nieskończenie wiele klas abstrakcji. Tak jest, bo każda liczba pierwsza wyznacza inną klasę abstrakcji, więc zbiór klas abstrakcji relacji r jest mocy $\aleph_0$.

Zadanie 2: Oczywiście $\overline{\overline{U}} \leq \mathfrak{C}$ bo zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Zdefiniujemy teraz funkcję $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to U$. Poniżej, przez $w_3(n)$ oznaczamy największe takie r, że n dzieli się przez 3^r.

$$F(f)(n) = \begin{cases} f(k), & \text{jeśli } n = 2k; \\ w_3(n), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja F jest dobrze określona, tj, $F(f) \in U$ dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bo dla dowolnego r istnieje nieskończenie wiele liczb nieparzystych, które w rozkładzie na czynniki pierwsze dają r trójek. Funkcja F jest też różnowartościowa, bo dla $f(k) \neq g(k)$ zachodzi $F(f)(2k) \neq F(g)(2k)$. A więc moc zbioru U jest co najmniej taka jak moc zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, z czego ostatecznie wynika $\overline{\overline{F}} = \mathfrak{C}$.