15 quickies in group theory

1. Czy w grupie, w której istnieją elementy rzędów 3 i 5 musi istnieć element rzędu 15?

2. Liczby n i m są takie, że $\mathbb{Z}_n$ jest podgrupą w Σ_m oraz $\mathbb{Z}_m$ jest podgrupą w Σ_n. Czy z tego wynika, że $n = m$?

3. Podaj cztery przykłady parami nieizomorficznych grup rzędu 12.

4. Niech $\sigma = (17352)(468)(9\ 12\ 11\ 10)$. Czy permutacja σ^4 jest parzysta?

5. Niech G będzie grafem, który składa się z dwóch spójnych składowych G_1 i G_2. Czy $Aut(G) = Aut(G_1) \oplus Aut(G_2)$? ($Aut$ oznacza grupę automorfizmów grafu.)

6. Czy grupa $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ jest podgrupą w Σ_6?

7. W pewnej grupie każdy element jest rzędu parzystego. Czy wynika stąd, że rząd grupy jest potęgą 2?

8. Ile podgrup ma grupa $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$? A ile z dokładnością do izomorfizmu (wypisz je wszystkie)?

9. Czy któraś z grup A_n jest cykliczna i nietrywialna?

10. Czy istnieje 24-elementowa podgrupa G w Σ_{12}, o tej własności, że dla dowolnych różnych liczb $n, m \in \{1, \ldots, 12\}$ istnieje permutacja $\sigma \in G$ taka, że $\sigma(n) = m$?

10'. Jeżeli grupa G z zadania 10 istnieje, to czy można dodatkowo zażądać, aby była izomorficzna z Σ_4?

11. Czy grupa automorfizmów grafu Petersena jest 72-elementowa?

12. Czy każda grupa rzędu n działa przechodnio na jakimś zbiorze n-elementowym?

13. Grupa $\mathbb{Z}_{61}$ działa nietrywialnie na zbiorze 100-elementowym. Ile orbit ma to działanie?

14. Rozważamy działanie grupy automorfizmów grafu pełnego K_n na zbiorze wierzchołków. Ile elementów ma stabilizator jednego wierzchołka? A dla działania na zbiorze krawędzi - ile elementów ma stabilizator jednej krawędzi?

Odpowiedzi: `http://www.mimuw.edu.pl/~aszek/grupyXX.txt`, gdzie `XX` jest sumą tych spośród liczb 1,2,4,5,6,9,12, które są numerami zadań z odpowiedzią „tak".