Algebra Homologiczna — zadania

Zalecana lektura:

1. S. I. Gelfand, Yu. I. Manin “Methods of homological algebra. Vol. 1”, Moscow, 1988. (rosyjski oryginał; istnieje tłumaczenie na angielski)
2. S. I. Gelfand, Yu. I. Manin “Homological algebra”, Current problems in mathematics. Fundamental directions Vol. 38, 1989. (rosyjski oryginał; istnieje tłumaczenie na angielski)
3. C. A. Weibel “An introduction to homological algebra”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Zad. 1.

$\mathcal{C}$ nazywamy *Ab-kategorią* jeśli zbiory $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ mają struturę grupy abelowej i składanie morfizmów jest rozdzielne względem tego dodawania. Znaleźć kategorię addytywną $\mathrm{Add}\,\mathcal{C}$ i funktor $F\mathcal{C} \to \mathrm{Add}\,\mathcal{C}$, które są obiektem początkowym w kategorii funktorów z $\mathcal{C}$ do kategorii addytywnych.

Zad. 2.

Niech R będzie pierścieniem, a $\tilde{R}$ stowarzyszoną Ab-kategorią z jednym obiektem i morfizmami R. Co to jest $\mathrm{Add}\tilde{R}$?

Zad. 3.

Pokazać, że dla dowolnych ideałów I, J w pierścieniu przemiennym R mamy

$$\mathrm{Tor}_2^R(R/I, R/J) = \ker(I \otimes J \to IJ).$$

Zad. 4.

Pokazać, że iloczyn tensorowy jest przemienny z dowolnymi granicami prostymi.

Zad. 5.

Niech A jest grupą abelową torsyjną. Znaleźć $\mathbb{Z}$-moduł M taki, że

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, S^1),$$

gdzie S^1 jest okręgiem.

Zad. 6.

Pokazać, że obraz homomorficzny modułu injektywnego jest injektywny.

Czy jest prawdą, że w dowolnej kategorii abelowej obraz obiektu injektywnego jest injektywny?

Zad. 7.

Pokazać, że branie granic prostych i odwrotnych nie jest ze sobą przemienne.

Zad. 8.

Niech I będzie obiektem injektywnym w kategorii abelowej $\mathcal{C}$. Pokazać, że dla dowolnego quasiizomorfizmu $s\, I \to K$ istnieje $t\, K \to I$ takie, że $ts \simeq \mathrm{id}_I$.

Zad. 9.

Znaleźć dwie różne struktury M_1 i M_2 $\mathbb{Z}_2$-modułu na $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tak by $H_1(\mathbb{Z}_2, M_1) \neq H_1(Z_2, M_2)$.

Zad. 10.

Niech F będzie funktorem zapominania z kategorii łącznych k-algebr do przestrzeni wektorowych nad k. Znaleźć lewy funktor dołączony do funktora F.

Zad. 11.

Niech $f\, X \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem przestrzeni topologicznych. Znaleźć lewy funktor dołączony do funktora f_* (pchnięcie snopów z X do Y).

Zad. 12.

Opisać $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ i pokazać, że jest to obiekt końcowy w kategorii schematów.

Zad. 13.

Pokazać, że jeśli w pierścieniu A istnieją niezerowe elementy e_1 i e_2 takie, że $e_1 e_2 = 0, e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1 + e_2 = 1$, to $\operatorname{Spec} A$ nie jest spójne.

Zad. 14.

Pokazać przykład niezerowego morfizmu w kategorii pochodnej kategorii grup abelowych indukującego 0 na kohomologiach.

Zad. 15.

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią abelową. Pokazać, że istnieje naturalny funktor $D^b(\mathcal{C}) \to D^+(\mathcal{C})$ indukowany przez identyczność na kompleksach i pokazać, że jest on zupełnie wierny.

Zad. 16.

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, której obiektami są grupy abelowe z topologią Hausdorffa a morfizmami są ciągłe homomorfizmy grup. Pokazać, że w tej kategorii istnieją jądra i kojądra, ale nie jest ona abelowa.

Zad. 17.

Pokazać, że jeśli mamy ciąg dokładny R-modułów

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

gdzie B i C są płaskie, to A też jest płaskim R-modułem. Czy jest prawdą, że jeśli A i B są płaskie, to C też jest płaski?

Zad. 18.

Pokazać, że nieskończony produkt $M = \mathbb{Z}_2 \times Z_3 \times Z_4 \times \dots$ nie jest grupą torsyjną i pokazać, że $\operatorname{Ext}^1(A, M) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy grupa A jest injektywna (w kategorii grup abelowych).

Zad. 19.

Niech

$$0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to 0$$

będzie ciągiem dokładnym R-modułów. Pokazać, że jeśli I_1 i I_2 są injektywne, to I_3 też jest injektywny.

Zad. 20(XX).

Zróbić wszystkie zadania do rozdziału XX książki S. Langa "Algebra" (3-cie wydanie).

Zad. 21.

Niech $\mathbb{C}P^1$ będzie jednowymiarową przestrzenią rzutową nad $\mathbb{C}$. Określamy na niej dwie różne topologie: jedna zwykła jak na sferze, a druga taka, że zbiorami właściwymi zbiorami domkniętymi są tylko skończone zbiory punktów. Niech $\mathbb{Z}$ będzie snopem stałym stowarzyszonym z $\mathbb{Z}$ (tj. $\mathbb{Z}(U)$ jest grupą wszystkich ciągłych odwzorowań z U w Z) Czy $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z})$ zmienia się w zależności od topologii?

Oprócz tego co wyżej oczywiście obowiązują zadania z ćwiczeń i teoria (w szczególności na pewno będzie trzeba udowodnić jakieś twierdzenie z wykładu, podać jakąś konstrukcję, etc.)