Egzamin z Algebry Homologicznej I

Do wyboru jest 5 zadań, przy czym powinno być wybrane dokładnie jedno z zadań 7 i 8.

Zad. 1. Pokazać, że dla dowolnego ideału I w pierścieniu przemiennym R mamy

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/I) = I/I^2.$$

Zad. 2.

Skonstruować sumę włóknistą dwóch morfizmów $f : Z \to X$ i $g : Z \to Y$ w kategorii abelowej i pokazać, że spełnia ona odpowiednią definicję.

Zad. 3.

Podać definicję stożka odwzorowania i pokazać, że kohomologie stożka quasiizomorfizmu są zerowe.

Zad. 4.

Niech X będzie prostą rzeczywistą z topologią w której zbiorami domkniętymi są $\emptyset, \mathbb{R}$ i skończone zbiory punktów. Niech $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie systemem prostym grup abelowych na X.

a) Pokazać, że presnop $F : U \to \lim_{i\in N}(F_i(U))$ jest snopem grup abelowych i jest on granicą prostą systemu $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (w kategorii snopów).

b) Pokazać, że a) nie jest prawdą jeśli zamiast X weźmiemy $\mathbb{R}$ za zwykłą topologią.

Zad. 5.

Pokazać, że kategoria krótkich ciągów dokładnych grup abelowych nie jest abelowa.

Zad. 6.

Znaleźć dwie różne struktury M_1 i M_2 $\mathbb{Z}_2$-modułu ($\mathbb{Z}_2$ traktowane jest jako grupa) na $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tak by $H_1(\mathbb{Z}_2, M_1) \neq H_1(Z_2, M_2)$.

Zad. 7.

Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami abelowymi i załóżmy, że $\mathcal{C}$ ma wystarczająco wiele obiektów projektywnych. Naszkicować dowód, że ciąg funktorów pochodnych funktora addytywnego $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest lewym spójnym ciągiem funktorów.

Zad. 8.

Naszkicować dowód addytywności kategorii pochodnej kategorii abelowej.