

Kraków, 21 lutego 2024

dr hab. Jakub Kozik, prof. UJ
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

Recenzja rozprawy doktorskiej p.t.

New results in (ob)structural graph theory

przedstawionej przez mgr. Łukasza Bożyka
Radzie Naukowej Dyscyplin Matematyka i Informatyka
Uniwersytetu Warszawskiego.

Prace wchodzące w skład rozprawy

Rozprawa została przygotowana na podstawie pięciu współautorskich prac Kandydata:

- (A1) Łukasz Bożyk, Michał Pilipczuk, *On the Erdős-Pósa property for immersions and topological minors in tournaments*, *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 24(1), 2022;
- (A2) Łukasz Bożyk, Michał Pilipczuk, *Polynomial kernel for immersion hitting in tournaments*, In 30th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2022), volume 244 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 26:1–26:17, 2022;
- (B1) Łukasz Bożyk, Oscar Defrain, Karolina Okrasa, Michał Pilipczuk, *On objects dual to tree-cut decompositions*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 157:401–428, 2022;
- (B2) Łukasz Bożyk, Oscar Defrain, Karolina Okrasa, Michał Pilipczuk, *On digraphs without onion star immersions*, 2022 (preprint, submitted);
- (C) Łukasz Bożyk, Jan Derbisz, Tomasz Krawczyk, Jana Novotná, Karolina Okrasa, *Vertex deletion into bipartite permutation graphs*, *Algorithmica*, 84(8):2271–2291, 2022¹.

Poza preprintem B2, prace zostały opublikowane w czasopismach naukowych o przyzwoitym poziomie i prezentowane na rozpoznawalnych konferencjach informatycznych. Wśród miejsc publikacji wyróżnia się *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, który należy do ścisłej czołówki czasopism kombinatorycznych. Warto odnotować i docenić fakt, iż wszystkie prace składające się na rozprawę są opublikowane w otwartym dostępie². Główne dowody przedstawione w rozprawie, opisane w rozdziałach 3-7, są tożsame z dowodami w ww. artykułach.

Kandydat we wstępie rozprawy zadeklarował swój wkład w powstanie ww. publikacji. Zgodnie z oświadczeniem, pełnił aktywną rolę w dowodzeniu głównych twierdzeń, aktywnie uczestniczył w spotkaniach zespołów i odbywających się w ich trakcie dyskusjach, brał też udział w redagowaniu publikacji. Oświadczenia nie pozwalają wyodrębnić indywidualnego wkładu Kandydata w osiągnięte wyniki. Wszystkie prace będące podstawą rozprawy mogą świadczyć o warsztacie naukowym Kandydata oraz umiejętności współpracy. Nie mogą jednak uznać prac B1, B2, C za „wyodrębnioną część pracy zbiorowej”. Wobec tego kluczowe dla spełnienia podstawowej przesłanki ustawowej³ będą wyniki prac A1 oraz A2, których jedynym współautorem jest Promotor Kandydata.

¹ Praca ta była również prezentowana na konferencji IPEC 2020, gdzie uzyskała wyróżnienie.

² w podstawowym miejscu lub jako preprint na arXiv

³ dotyczącej oryginalnego rozwiązania problemu naukowego przez Kandydata

Główne wyniki rozprawy

Tematyka rozprawy to strukturalna teoria grafów oraz algorytmy parametryzowane. Większość prac wpisuje się w nurt badań strukturalnej teorii grafów, który stawia sobie za cel przeniesienie klasycznych wyników tej teorii na grafy skierowane. Rozważania przedstawione w rozprawie skupiają się na immersjach. Jest to sposób zanurzania grafów, w którym wierzchołki pierwszego z grafów są mapowane iniektywnie w wierzchołki drugiego, a krawędzie pierwszego w rozłączne krawędziowo ścieżki łączące w drugim grafie wierzchołki odpowiadające końcom krawędzi. Prace rozprawy dużo uwagi poświęcają turniejom, które stanowią relatywnie prostą podklasę grafów skierowanych. Motywacje części rozważań przedstawionych w rozprawie nie były dla mnie czytelne. Lektura pełnych wersji prac pozwala je lepiej umiejscowić w kontekście bieżących badań⁴.

Materiał przedstawiony w rozprawie został podzielony na trzy opisane poniżej części.

⁴ Wstępy do poszczególnych prac zostały w rozprawie zastąpione wspólnym wprowadzeniem.

Część 1: *Immersion in Tournaments (A1, A2)*

(A1) Erdős-Pósa Property for Immersions and Topological Minors in Tournaments.

Klasyczne twierdzenie Erdős-Pósa mówi o istnieniu funkcji f takiej, że dla dowolnego grafu G oraz liczby k , jeśli G nie zawiera k rozłącznych cykli, to istnieje zbiór wierzchołków o mocy ograniczonej przez $f(k)$ taki, że po jego usunięciu graf nie zawiera żadnych cykli.

Powyższe twierdzenie doczekało się wielu wariantów i uogólnień. W pracy autorzy udowadniają dwa nowe warianty. W obu przypadkach w roli cykli może wystąpić dowolny (prosty) digraf H , a w roli grafu G turniej. Przypadki różnią się interpretacją zawierania: w jednym z nich jest ono interpretowane jako immersja, w drugim – jako minor topologiczny. Konkluzja jest analogiczna: jeśli turniej nie zawiera dużej liczby rozłącznych kopii digrafu H , to da się wyeliminować wszystkie wystąpienia usuwając stosunkowo niewielką liczbę krawędzi. Oba te warianty były wcześniej rozważane w pracy Raymonda⁵, w której powyższe własności były dowiedzione przy dodatkowym założeniu, że digraf H jest silnie spójny⁶. Głównym wynikiem pracy A1 jest osiągnięcie analogicznych rezultatów dla wszystkich⁷ prostych grafów H .

⁵ Jean-Florent Raymond. Hitting minors, subdivisions, and immersions in tournaments. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 20(1):Paper No. 5, 10, 2018

⁶ Z drugiej strony jednak we wspomnianej pracy, w roli grafu G mógł występować digraf należący do pewnej istotnej nadklasy turniejów.

⁷ tj. także dla niespójnych

Dowody obu wariantów są analogiczne. Podążają za naturalną strategią, w szczególności rozważając wszystkie możliwe topologiczne uporządkowania spójnych składowych zanurzanego grafu. Bazują również na znanych wcześniej ograniczeniach na *cutwidth* oraz *pathwidth* w turniejach unikających ustalonego digrafu. Praca prezentuje solidny warsztat, trudno jednak uznać zawarte w niej dowody za nowatorskie. Pozytywnym aspektem jest fakt, że praca udziela częściowej odpowiedzi na pytanie postawione w pracy Raymonda.

(A2) Polynomial Kernels for Immersion Hitting in Tournaments.

Dla ustalonego digrafu H problem *H-hitting set* dla immersji w turniejach polega na stwierdzeniu, czy dla danej pary (T, k) , w której T jest turniejem, a k liczbą naturalną, da się usunąć k krawędzi z T w taki sposób, żeby otrzymany digraf nie zawierał immersji H . Algorytmy FTP dla tego problemu, gdzie w roli parametru występuje k , były znane wcześniej. Praca A2 rozszerza ten rezultat, dowodząc istnienia wielomianowych kerneli. Głównym wynikiem pracy jest konstrukcja wielomianowego algorytmu, który dla instancji powyższego problemu w wielomianowym czasie konstruuje równoważną instancję (T', k) , w której rozmiar T' jest ograniczony wielomianem k .

Autorzy przyznają, że ich strategia dowodowa wykorzystuje znany schemat, w którym dla odpowiednio dużej instancji, można znaleźć jej fragment, którego

usunięcie lub zastąpienie mniejszą strukturą nie zmienia odpowiedzi. Iterując taką transformację, można sprowadzić instancję do rozmiaru zależnego jedynie od parametru. W badanym przypadku implementacja tej strategii nie jest oczywista. Istotną komplikację stanowi fakt, że ze względu na naturę turniejów, usuwany fragment jest zawsze połączony krawędziami z wszystkimi pozostałymi wierzchołkami. Z drugiej strony, ta sama własność prowadzi to istnienia w pewnych sytuacjach generycznych wierzchołków, które mogą służyć do zastępowania innych lub skracania ścieżek.

Wynik pracy A2 nie brzmi może imponująco, jednak rozumowanie, które do niego prowadzi jest wyrafinowane. Nie mam wątpliwości, że uzyskanie tego wyniku wymagało wiele pracy. Ostateczny efekt jest zaawansowany technicznie i świadczy o solidnym warsztacie i determinacji autorów. Dobre wrażenie robi również wykorzystanie w dowodzie tzw. Simon Factorization Theorem – narzędzia pochodzącego z teorii automatów.

Część 2: Immersions and Duality (B_1, B_2)

(B1) Objects Dual to Tree-cut Decomposition.

Autorzy proponują nową, alternatywną definicję tzw. szerokości *tree-cut*. Oryginalna definicja pochodzi z pracy Wollana z roku 2015⁸, która posłużyła do sformułowania tzw. Wall Immersion Theorem⁹. Równoważne sformułowanie zostało przedstawione w pracy Giannopoulou i innych¹⁰ w celu uproszczenia dowodów pewnych własności algorytmicznych. Nowy, proponowany przez autorów parametr nie jest dokładnie równoważny, pozostaje jednak w funkcyjnej zależności z parametrem Wollana. W większości zastosowań ta rozbieżność jest nieistotna. Proponowany w pracy wariant ma szereg pożądanych własności. W szczególności, analogicznie do przypadku parametru *tree-width*, pozwala ona na wskazanie naturalnych obiektów dualnych (*brambles* oraz *tangles*), które świadczą o wysokiej wartości parametru. Zwieńczeniem pracy jest charakteryzacja nowego parametru za pomocą gry kombinatorycznej *cops, dogs, and robber* (analogicznej do charakteryzacji *tree-width* za pomocą gry *cops and robber*).

Autorzy sami przyznają, że dowody w pracy są standardowe, a czasem nawet prostsze niż dla przypadku *tree-width*. Jest to jednak kolejny argument przemawiający za naturalnością proponowanych sformułowań. W istocie główny wkład pracy i główna trudność polegała na postawieniu odpowiedniej definicji. Jest to najbardziej doniosła z prac wchodzących w skład rozprawy.

(B2) Digraphs without Onion Star Immersions.

Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie analogiczne do pomocniczego wyniku Wollana, który był wielokrotnie wykorzystywany w jego dowodzie Wall Immersion Theorem¹¹. Oryginalne sformułowanie brzmi następująco: jeżeli graf zawiera dużą liczbę wierzchołków, dla których każda para jest połączona dużą liczbą krawędziowo rozłącznych ścieżek, to taki graf musi zawierać immersję dużej klikki. Analogicznie twierdzenie dowiedzione w pracy dotyczy digrafów i przy analogicznych założeniach dowodzi immersji struktury nazwanej *t-onion*¹².

Podobnie jak w przypadku poprzedniej pracy, dużą składową sukcesu było sformułowanie twierdzeń. Dowód jest w miarę naturalny, ale nie oczywisty. Poza standardowymi w tym obszarze narzędziami typu dualność *flow-cut*, wykorzystuje elementy teorii Ramsey'a oraz bardzo podstawowy argument probabilistyczny.

Część 3: Bipartite permutation graphs (C)

(C) Vertex Deletion into Bipartite Permutation Graphs.

⁸ Paul Wollan. The structure of graphs not admitting a fixed immersion. *J. Combin. Theory Ser. B*, 110:47–66, 2015

⁹ odpowiednika Grid Minor Theorem dla immersji

¹⁰ Archontia Giannopoulou, Michał Pilipczuk, Jean-Florent Raymond, Dimitrios M. Thilikos, and Marcin Wrochna. Linear kernels for edge deletion problems to immersion-closed graph classes. *SIAM J. Discrete Math.*, 35(1):105–151, 2021

¹¹ Paul Wollan. The structure of graphs not admitting a fixed immersion. *J. Combin. Theory Ser. B*, 110:47–66, 2015

¹² t jest liczbą małych struktur tzw. *onions* tworzących całą strukturę

Autorzy w pracy C badają problem, czy dla danego grafu da się usunąć określoną liczbę wierzchołków tak, aby wynikowy graf był dwudzielnym grafem permutacji. Główne twierdzenie artykułu mówi o istnieniu algorytmu FTP dla powyższego problemu¹³ oraz algorytmu aproksymującego minimalną liczbę wierzchołków, które trzeba usunąć, aby otrzymać dwudzielny graf permutacji. Tematycznie praca ta odbiega od pozostałych artykułów tworzących rozprawę, wciąż jednak dotyczy algorytmów parametryzowanych, a jej większa część poświęcona jest analizie struktury rozważanych grafów.

Klasa dwudzielnych grafów permutacji może być scharakteryzowana przez rodzinę zabronionych indukowanych podgrafów. Rodzina ta jest wprawdzie nieskończona, ale jedyne struktury, których rozmiar może być dowolnie duży to cykle. Podobnie jak w przypadku wcześniejszych wyników dla analogicznych problemów w klasie grafów przedziałowych¹⁴, autorzy definiują *niemal dwudzielne grafy permutacji* jako grafy, które unikają małych zabronionych struktur. Problemy usuwalności dla tej klasy mogą być łatwo rozwiązane przy pomocy standardowych technik. Główny wynik tej pracy to precyzyjna charakteryzacja struktury niemal dwudzielnych grafów permutacji. Analogicznie do wcześniejszego wyniku¹⁵ dla dwudzielnych grafów permutacji¹⁶ autorzy dowodzą, że każdy niemal dwudzielny graf permutacji może być zanurzony w cylinder lub wstęgę Moebiusa.

Problem nie sprawia wrażenia trudnego i został rozwiązany w naturalny sposób. Warto jednak docenić, że struktura została w pełni scharakteryzowana. Po przeczytaniu pracy ma się wrażenie, że autorzy w istocie zgłębili i wyczerпали temat.

Forma pracy

Praca napisana jest poprawnym językiem angielskim. Organizacja materiału jest właściwa. Poza dowodami przytoczonymi literalnie z publikacji, na podstawie których przygotowano rozprawę, rozprawa została opatrzona zunifikowanym wstępem. Zaczerpnięte z publikacji ilustracje pomagają w zrozumieniu nierzadko skomplikowanych technicznie koncepcji i rozumowań.

Konkluzja

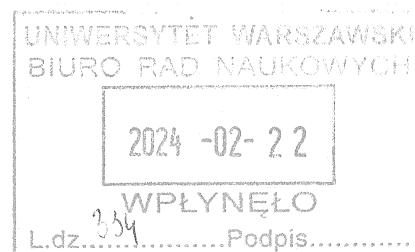
Rozprawa zawiera szereg wyników, które nawiązują do prowadzonych współcześnie badań naukowych. Wszystkie wyniki są nieelementarne, różnią się jednak charakterem i doniosłością. W przypadku części z nich najważniejszym wkładem jest sama koncepcja i odpowiednie ujęcie problemu. Wartością innych, zwykle mających na celu opracowanie algorytmów FPT, jest wnikliwy wgląd w strukturę analizowanych instancji. Różnorodność zagadnień i narzędzi pozwala uznać, że rozprawa prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną Kandydata w dyscyplinie Informatyka. Prace B1, B2 oraz C, napisane w większych zespołach, świadczą o kompetencjach naukowych Kandydata i umiejętności współpracy. Prace A1 oraz A2, których jedynym współautorem jest Promotor, mogą być uznane za przesłankę spełnienia ustawowych wymagań dotyczących umiejętności samodzielnego prowadzenia pracy naukowej oraz rozwiązania przez Kandydata problemu naukowego. Oczekuję jednak, że forma tej współpracy zostanie przedyskutowana z Promotorem w trakcie posiedzenia Komisji Doktorskiej. W związku z powyższym wnioskuję o dopuszczenie Kandydata do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

¹³ parametrem jest liczba usuwanych wierzchołków

¹⁴ Pim van 't Hof and Yngve Villanger. Proper interval vertex deletion. *Algorithmica*, 65(4):845–867, 2013

¹⁵ Jeremy Spinrad, Andreas Brandstädt, and Lorna Stewart. Bipartite permutation graphs. *Discrete Appl. Math.*, 18(3):279–292, 1987

¹⁶ każdy taki graf można naturalnie zanurzyć w pasek (ang. *strip*)



Jakub Kozik

Podpisany elektronicznie przez
Jakub Kozik
21.02.2024
20:51:06 +01'00'