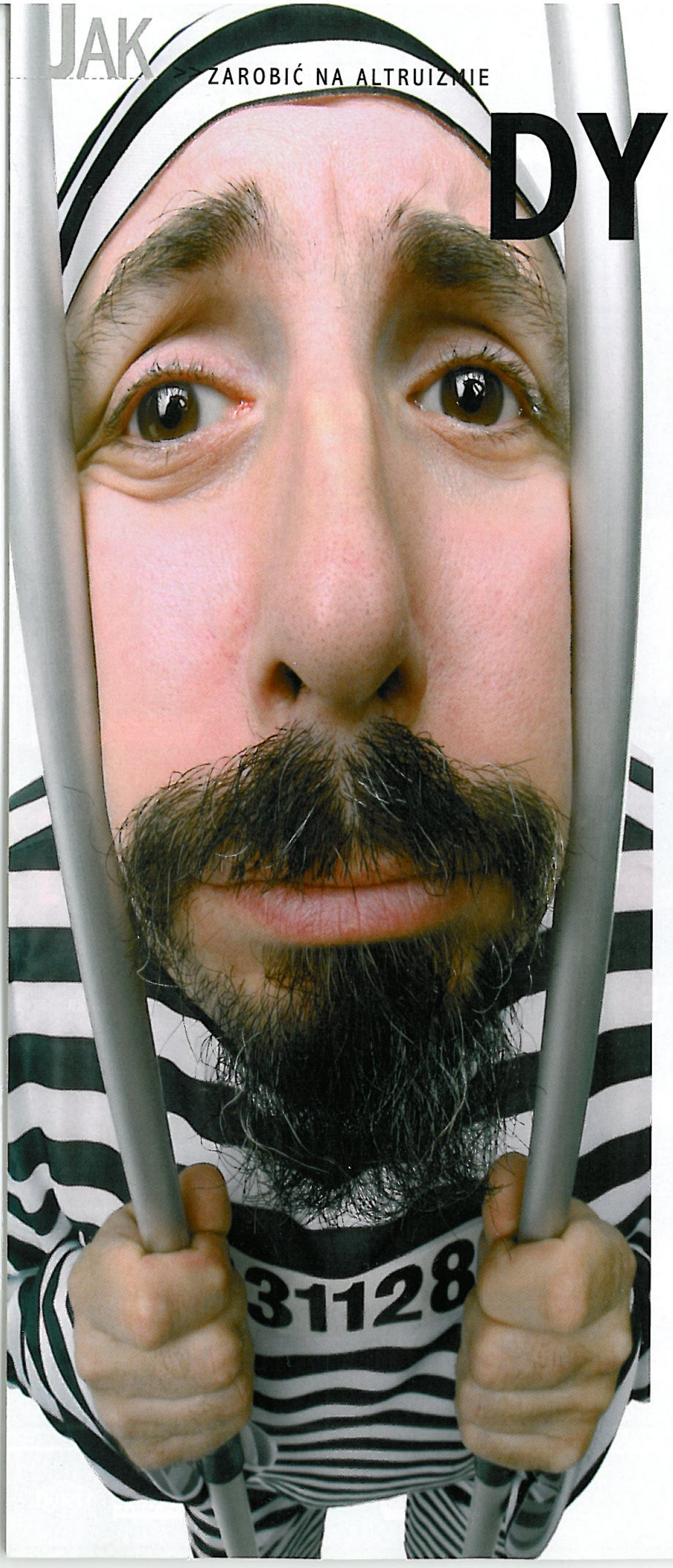



# DYLEMAT WIĘŹNIA A EWOLUCJA

Trudno dopatrzyć się sensu w działaniach altruisty – przecież pomaga przeżyć niespokrewnionym. Dokładniejsza analiza pokazuje jednak, że taka strategia może się naprawdę opłacać.

**JACEK MIĘKISZ**

JOHN B. S. HALDANE, angielski genetyk żyjący w pierwszej połowie XX wieku, rozprawiał pewnego dnia w pubie o problemie istnienia zachowań altruistycznych. Z teorii ewolucji Darwina wynika, że każdy dba o swoje interesy, aby przetrwała jego linia potomna. W jaki sposób altruistyczne zachowanie może być egoistyczne w sensie darwinowskim? – zastanawiał się Haldane. Nagle zerwał się od stołu usłanego serwetkami pełnymi obliczeń z okrzykiem: *Poświęcę życie dla dwóch braci albo ośmiu kuzynów!* Aby zrozumieć sposób myślenia Haldane'a, odświeżmy znajomość genetyki.

Każda ludzka komórka (prócz rozrodczych) zawiera 23 pary chromosomów, na których są rozmieszczone geny – nasz plan na przyszłość. W procesie mejozy powstają komórki rozrodcze, mające po jednym chromosomie z każdej pary, czyli tylko połowę materiału genetycznego. W momencie poczęcia, przy połączeniu się komórek rozrodczych, otrzymujemy zatem połowę genów od matki i połowę od ojca. Twój brat dzieli więc z tobą średnio połowę twoich genów, stąd można powiedzieć, że jest on połową ciebie. Trzech twoich braci to pod względem genetycznym półtora ciebie, a więc z punktu widzenia egoistycznych genów warto oddać swoje życie za trzech braci (w przypadku dwóch nasze życie i ich łącznie mają taką samą wartość).

Jest to istota tzw. doboru krewniaczego (*kin selection*), teorii z lat 60. poprzedniego wieku autorstwa angielskiego biologa Williama D. Hamiltona. Zastosujmy ją do mrówek.

## Nepotyzm w mrowisku

Organizmy powstające z komórek zawierających pary chromosomów nazywamy diploidalnymi, te zaś, w których komórkach są pojedyncze chromosomy, haploidalnymi. Mrówki są haplodiploidalne. Osobniki żeńskie rozwijają się z zapłodnionych jajeczek i są diploidalne, męskie natomiast powstają z jajeczek niezapłodnionych, otrzymują zatem chromosomy tylko od matki – są więc haploidalne. Wnikliwy, i mający pod ręką serwetkę, czytelnik natychmiast dojdzie do następujących wniosków: siostra mrówka nie poświęciłaby swojego życia, żeby uratować trzech braci, natomiast trzy siostry poszłyby w ogień, niosąc pomoc czterem swoim siostrzyczkom (jest to przypadek graniczny, jak w przypadku dwóch braci).

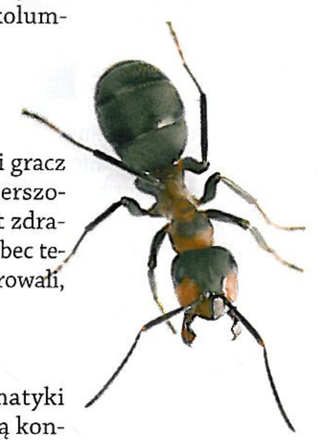
Wyjdźmy jednak z knajpki i udajmy się na łono natury, gdzie toczą się rzeczywiste walki biologiczne i gdzie jedne gatunki czy zachowania wypierają inne. Mrówki robotnice, pomagające królowej w opiece nad dziećmi, są trzy razy bardziej spokrewnione z siostrami niż z braćmi, powinny więc trzy razy troskliwiej opiekować się tymi pierwszymi (to znaczy lepiej je karmić). Rzeczywiście, biolodzy zaobserwowali, że stosunek masy ciała mrówek płci żeńskiej do mrówek samców jest w gniazdach bardzo bliski 3:1. Natomiast gdy pracownice nie są spokrewnione ze swoimi podopiecznymi, jest równy 1:1.

Dlaczego jednak zachowujemy się altruistycznie w stosunku do niespokrewnionych z nami osób? Rozpatrzmy ten problem na gruncie teorii gier. Przenieśmy się z królestwa genetyki do krainy socjobiologii.

## Więzień w rozterce

Wyobraźmy sobie, że dwaj podejrzani o ciężkie przestępstwo są przesłuchiwani na policji. Każdemu powiedziano, że jeśli przyzna się do winy, pogrążając swego kompana, który się nie przyzna, to może się spodziewać zmniejszenia wyroku o pięć lat. Jeżeli obaj nie będą wobec siebie lojalni, to odsiedzą w więzieniu o rok mniej; natomiast jeżeli obaj pójdą w zaparte, to z braku bezpośrednich dowodów obciążających, mogą liczyć na trzy lata krótszą odsiadkę. Każdy z nich zadaje sobie pytanie: co robić? Do wyboru są dwie strategie: nie obciążać kompana (kooperacja – K) lub współpracować z policją (zdrada – Z). Wypłatami naszych graczy są lata, które będą im darowane. Wypłata gracza zależy od jego strategii i od strategii kompana, możemy więc zapisać ją w postaci następującej macierzy, której poszczególne elementy są wypłatami gracza pierwszego (wierszowego) stosującego daną strategię, podczas gdy gracz drugi (kolumnowy) stosuje swoją:

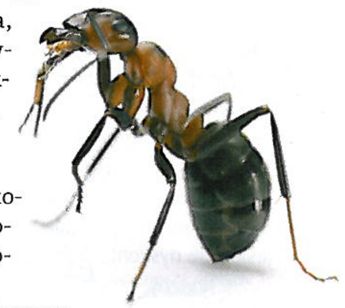
| | K | Z |
|---|---|---|
| K | 3 | 0 |
| Z | 5 | 1 |



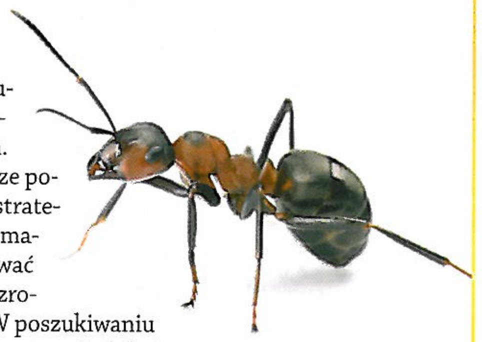
Zauważmy, że niezależnie od tego, co zrobi gracz kolumnowy, najlepszą odpowiedzią gracza wierszowego, czyli dającą mu największą wypłatę, jest zdrada. Mówimy, że zdrada dominuje kooperację. Wobec tego obydwaj gracze zdradzają, choć gdyby kooperowali, to dostaliby większą wypłatę: 3 zamiast 1.

## Równowagi Nasha

Jest rok 1950. John Nash, doktorant matematyki na Uniwersytecie Princeton, opracowuje swoją koncepcję równowagi – para strategii (strategia gracza pierwszego, strategia gracza drugiego) stanowi równowagę Nasha, jeśli każda z nich jest najlepszą odpowiedzią na drugą; innymi słowy, żadnemu z graczy nie opłaca się jednostronnie zrezygnować z gry w równowadze, bo na pewno nic na tym nie zyska, a być może straci. Równowaga Nasha zapewnia bezpieczeństwo, jest niepisanym kontraktem, którego jednostronne zerwanie nikomu się nie opłaca. Oczywiście równowagą Nasha w dylemacie więźnia jest para (zdrada, zdrada; Z,Z). Widzimy więc, że równowaga Nasha niekoniecznie daje nam największe wypłaty. Równowaga Nasha zapewnia pewną stabilność zachowań, ale nie gwarantuje optymalności.



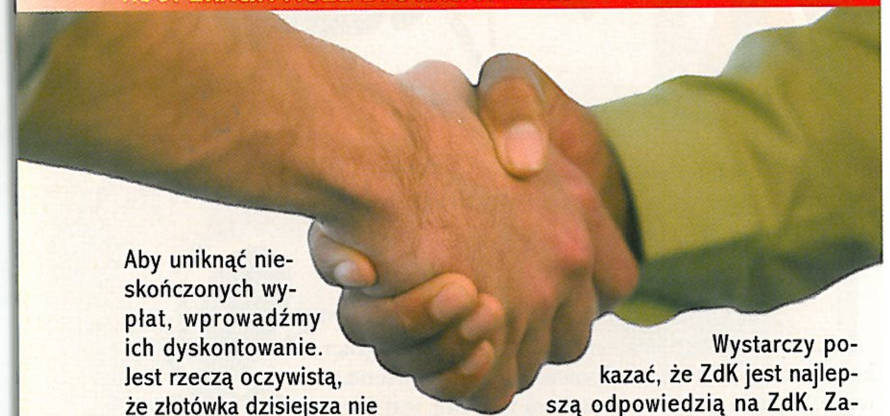
W tym samym roku przeprowadzono eksperyment, w którym dwóch graczy zagrało ze sobą w dylemat więźnia 100 razy z rzędu. Okazało się, że zgodna kooperacja wystąpiła aż 60 razy, a obustronna zdrada tylko 14 razy. Wyniki pokazano Nashowi. Ten jednak nie zgodził się z sugestią, że eksperyment wykazał bezużyteczność jego koncepcji równowagi. Nie można interpretować go, mówił, jako ciągu niezależnych gier, ale raczej jako jedną grę z wieloma ruchami. Rozważmy więc taką grę powtarzaną i znajdźmy jej równowagę Nasha. Zauważmy przede wszystkim, że w grze powtarzanej mamy do dyspozycji wiele strategii. Strategią jest przepis mówiący, co mamy zrobić w każdym kroku (kooperować czy zdradzić) w zależności od tego, co zrobił oponent w poprzednich krokach. W poszukiwaniu równowag pomocna będzie technika zwana indukcją wsteczną, czyli cofanie się w czasie.



W ostatnim, setnym kroku, gracze mogą pomyśleć następująco: nasz wybór w ostatnim kroku nie ma żad- >

Fot. istockphoto.com (2x)

## KOOPERACJA MOŻE BYĆ RACJONALNA



Aby uniknąć nieskończonych wypłat, wprowadźmy ich dyskontowanie. Jest rzeczą oczywistą, że złotówka dzisiejsza nie jest równa złotówce jutrzejszej. Praktycy finansowi mówią, że 1 złotówka dzisiaj jest równa $1 + r$ jutro, gdzie $r$ jest jednodniową stopą procentową. Innymi słowy, złotówka jutrzejsza jest warta dzisiaj $d = 1 / (1 + r)$; przy czym $d$ to tak zwane dyskonto. Zatem jeśli będziemy zarabiać złotówkę codziennie aż do nieskończoności, to wartość obecna naszego strumienia pieniędzy będzie wynosić

$1 + d + d^2 + d^3 + \ldots = 1 / (1 - d)$,

co jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego o ilorazie $d < 1$.

Ale dosyć tej matematyki finansowej, wracajmy do teorii gier. Pokażemy, że strategia zemsta do końca (ZdK) – zaczynamy od kooperacji i kooperujemy dopóty, dopóki przeciwnik nas nie zdradzi – jest strategią równowagową Nasha, jeśli tylko dyskonto $d$ jest odpowiednio duże, czyli oprocentowanie odpowiednio małe (ale oczywiście niezerowe).

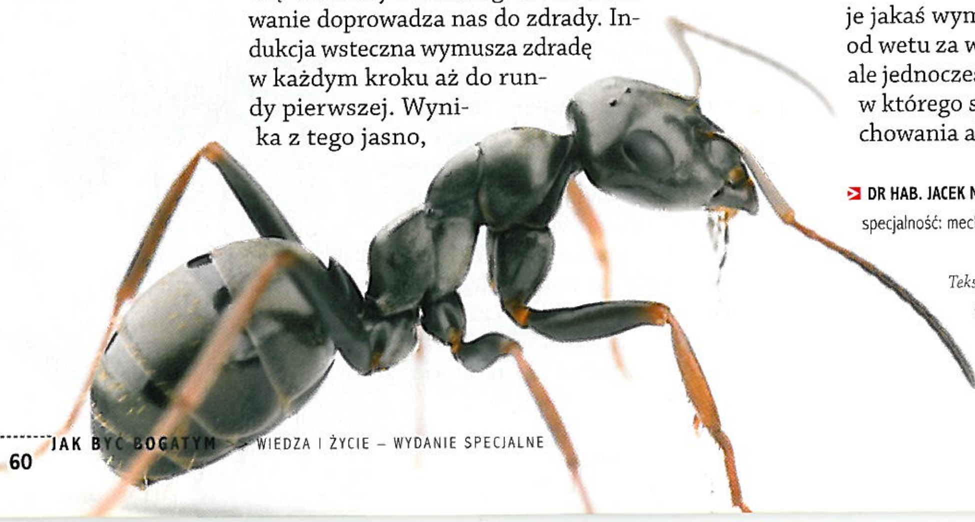
Wystarczy pokazać, że ZdK jest najlepszą odpowiedzią na ZdK. Załóżmy, że nasz przeciwnik gra ZdK. Nasza wypłata z ZdK jest równa $3 + 3d + 3d^2 + 3d^3 + \ldots = 3 / (1 - d)$. Jeżeli w którymś momencie zdradzimy i zainkasujemy 5, to od następnego momentu nasz przeciwnik będzie zawsze zdradzał, więc my też lepiej zdradzajmy. Nasza wypłata od momentu zdrady wynosić więc będzie

$5 + d + d^2 + d^3 + \ldots = 5 + d / (1 - d)$.

Jeśli $5 + d / (1 - d) \leq 3 / (1 - d)$, czyli $d \geq ½$, to (ZdK,ZdK) jest równowagą Nasha.

Jest jeszcze jedna bardzo ciekawa strategia – wet za wet (WzW). Rozpoczynamy od współpracy, a następnie powtarzamy ruch przeciwnika z poprzedniej rundy, a więc mścimy się, gdy zdradził i nagradzamy go, gdy kooperował. Poprosimy teraz ambitnego czytelnika, aby policzył, dla jakiego dyskonta para (WzW, WzW) jest równowagą Nasha.

nego wpływu na zachowanie się przeciwnika w przyszłości (bo jej po prostu nie ma) i wobec tego zdradzimy, co jest racjonalnym zachowaniem w pojedynczej grze. Tak samo myśli przeciwnik i obaj zdradzamy. Wiemy już, co się zdarzy w setnej rundzie, przejdźmy więc do rundy 99. Analogiczne rozumowanie doprowadza nas do zdrady. Indukcja wsteczna wymusza zdradę w każdym kroku aż do rundy pierwszej. Wynika z tego jasno, że jedyną równowagą powtarzanej gry w dylemat więźnia jest zdrada w każdym kroku. Wygląda więc, że szansą na kooperację może być tylko brak ostatniej rundy.



Załóżmy, że gra będzie się toczyć w nieskończoność. Okazuje się wtedy, że kooperacja może występować w równowadze. Rozważmy następującą prostą strategię, zwaną zemsta do końca (ZdK). Zaczynamy od kooperacji i kooperujemy dopóty, dopóki przeciwnik nas nie zdradzi, a jeśli to nastąpi, będziemy zdradzać już zawsze. Można pokazać, że w pewnych warunkach para (ZdK, ZdK) jest równowagą Nasha (patrz ramka). Jest to bardzo optymistyczna wiadomość – jeśli obaj gracze stosują ZdK, to mimo dramatycznej nazwy strategii (lub raczej dzięki niej) bez przerwy kooperują. Niestety, jak łatwo można się przekonać, para (zawsze zdradzaj, zawsze zdradzaj) jest również równowagą Nasha...

### Kooperacja – wynik doboru?

W 1980 roku Robert Axelrod, profesor nauk politycznych na Uniwersytecie w Michigan (posiadacz licencjatu z matematyki), przeprowadził następujący eksperyment. Poprosił teoriogrowców, psychologów, socjologów i ekonomistów o przesłanie swoich strategii dla powtarzanego w nieskończoność dylematu więźnia. Strategie te brały udział w turnieju, rozgrywając każda z każdą 200 rund dylematu więźnia. Dla każdej ze strategii komputer obliczał uśrednioną po wszystkich spotkaniach sumę wypłat. Okazało się, że najlepsza była strategia wet za wet, zaproponowana przez Anatola Rapoporta – rozpoczynaj od współpracy, a następnie powtarzaj ruch przeciwnika z poprzedniej rundy – która zdobyła 504 punkty na 1000 możliwych. W następnym etapie strategie reprodukowały się z liczbą potomków proporcjonalną do uzyskanego wyniku. Wzrastał więc procentowy udział strategii z większymi wypłatami – efekt doboru naturalnego Darwina. Po czym znowu każda ze strategii grała z każdą inną i znowu następna generacja była wynikiem doboru naturalnego.

Po wielu generacjach wet za wet okazał się strategią najczęściej występującą w populacji. Innymi słowy, wet za wet zachowywał się prawie jak punkt stabilny opisanego wyżej układu dynamicznego. Nie jest on jednak punktem asymptotycznie stabilnym ani – jakby to powiedzieli biolodzy – strategią ewolucyjnie stabilną. Jeśli do populacji „wetzawetowców" dodamy trochę wiecznych kooperantów, to mogą oni wiecznie z nimi współistnieć. Nie wiemy też, czy nie istnieje jakaś wymyślna strategia, która nie byłaby lepsza od wetu za wet. Trwają nadal poszukiwania prostego, ale jednocześnie realistycznego modelu ewolucyjnego, w którego stanach równowagowych będą obecne zachowania altruistyczne.

**DR HAB. JACEK MIĘKISZ,** Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, specjalność: mechanika statystyczna i teoria gier

*Tekst jest modyfikacją artykułu z „Delty" 7/2002, zamieszczonego w książce „O twierdzeniach i hipotezach. Matematyka według Delty" pod redakcją Wiktora Bartola i Witolda Sadowskiego, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego 2005.*