dla „Matematyki"; kwiecień 1982

Maria Moszyńska, Sławomir Nowak

Karol Borsuk (1905-1982)

Gdy 24 stycznia 1982 roku zmarł Profesor Karol Borsuk, wszyscy, którzy z Nim współpracowali, zdali sobie sprawę z faktu, że skończyła się jakaś epoka w historii matematyki, że minęło coś niepowtarzalnego.

Karol Borsuk urodził się w Warszawie w 1905 roku. W roku 1927 ukończył studia, a wlatach 1927-1930 pracował jako nauczyciel gimnazjum. Od roku 1930 był asystentem, a od 1938 - profesorem Uniwersytetu Warszawskiego. W czasie okupacji brał udział w tajnym nauczaniu. Za działalność podziemną był więziony na Pawiaku. W 1945 roku podjął znów pracę na Uniwersytecie, a w latach 1952-1964 kierował Instytutem Matematyki U.W. Jego niezrównane wykłady, w których łączył precyzję z umiejętnością przekazywania intuicji geometrycznych, pozostają do dziś w pamięci kilku pokoleń Jego uczniów. Karol Borsuk był współtwórcą Państwowego Instytutu Matematycznego. W Instytucie tym, przemianowanym później na Instytut Matematyczny PAN, działał do końca życia.

Trudno wymienić tu wszystkie akademie i towarzystwa naukowe, których był członkiem, oraz nagrody i odznaczenia, jakie otrzymał. Wymienimy tylko ostatnie wyróżnienie, jakie Mu przyznano: na początku stycznia 1982 roku został członkiem Papieskiej Akademii Nauk. Niestety wiadomość o tym przyszła już po Jego śmierci.

Twórczość naukowa Karola Borsuka była tak bogata i głęboka, że nie sposób przedstawić ją w krótkim artykule. Jego program badawczy koncentrował się w zasadzie na topologii geometrycznej, a za największe Jego osiągnięcia uważa się powszechnie dwie teorie, które stworzył i rozwinął: teorię retraktów i teorię kształtu. Z konieczności ograniczymy się tutaj do bardzo powierzchownego przedstawienia głównych idei tych dwóch teorii.

O topologii geometrycznej można nieprecyzyjnie powiedzieć, że bada pewne specjalne własności przestrzeni metrycznych. 1 [1] W odróżnieniu od geometrii metrycznej, która zajmuje się wszystkimi własnościami metrycznymi takich przestrzeni, tj. własnościami, które zachowują się przy izometriach, topologia geometryczna zajmuje się tylko niektórymi spośród tych własności, mianowicie takimi, które zachowują się nie tylko przy izometriach, ale nawet przy dowolnych homeomorfizmach, lub co więcej przy dowolnych przekształceniach ciągłych. [2] Ograniczmy się do przestrzeni Euklidesowej dwu- lub trójwymiarowej (ze zwykłą metryką kartezjańską) i jej dowolnych podprzestrzeni. Z topologicznego punktu widzenia nie różnią się zbiory A_1, A_2 i A_3 ; podobnie nie różnią się zbiory B_1, B_2 i B_3 (są to zbiory homeomorficzne):

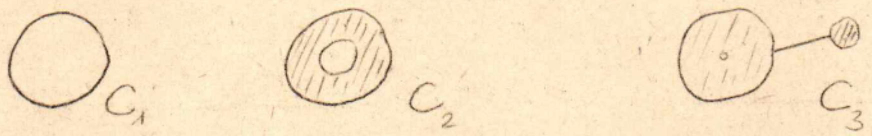
A więc klasyfikacja topologiczna jest mniej dokładna od metrycznej.

---

1) Por. "O przestrzeniach metrycznych", Delta Nr 1,5,8 (1975)

2) Homeomorfizm jest to funkcja ciągła i wzajemnie jednoznaczna, której odwrotna też jest ciągła.

Jeszcze mniej dokładna jest tzw. klasyfikacja homotopijna. Rolę homeomorfizmów spełniają w teorii homotopii przekształcenia zwane homotopijnymi równoważnościami. Zbiory C_1, C_2 i C_3, które różnią się pod względem topologicznym, nie różnią się z punktu widzenia teorii homotopii.



Natomiast zbiory D_1 i D_2 nie są równoważne nawet z homotopijnego punktu widzenia.

$D_2 = S \cup I \cup L$

Zbiór D_2, zwany "warszawskim okręgiem", jest sumą wykresu S funkcji f oreślonej przez wzór $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ dla $x \in (0, \frac{1}{\pi})$, odcinka I oraz łuku L o końcach a i b.

Okrąg i warszawski okrąg są to zwarte podzbiory płaszczyzny Euklidesowej [3], z których każdy rozcina tę płaszczyznę na dwa obszary. Z punktu widzenia teorii kształtu dwa zbiory podzbiory płaszyzny rozcinające ją płaszczyznę na tę samą liczbę obszarów nie różnią się między sobą, tj. mają ten sam kształt. Dla podzbiorów przestrzeni trójwymiarowej sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana. Ogólnie, rolę przekształceń odgrywają w teorii kształtu pewne ciągi przekształceń, które otoczenia jednego zbioru przekształcają w otoczenia drugiego. Natomiast rolę homeomorfizmów czy też homotopijnych równoważności odgrywają tu tzw. równoważności kształtowe.

---

3) Zwarte podzbiory płaszczyzny (przestrzeni) Euklidesowej charakteryzują się tym, że są domknięte i ograniczone.

Teoria Kształtu powstała w 1968 roku zapoczątkowana pracą Karola Borsuka "On the homotopy properties of compacta". Wystarczy powiedzieć, że od tego czasu napisano na temat Teorii Kształtu kilkaset prac oraz 3 monografie (pierwszą z tych monografii była książka Borsuka "Shape Theory"), aby stało się jasne dla każdego, że jest to teoria zbyt rozbudowana by można było tu zająć się nią nieco dokładniej.

Zbiory A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 są wielościanami (krzywoliniowymi [4]). W zakresie wielościanów kształt nie różni się od typu homotopii, tzn. dwa wielościany mają ten sam kształt wtedy i tylko wtedy gdy są homotopijnie równoważne. Można wskazać szerszą klasę przestrzeni o tej własności - są to absolutne retrakty otoczeniowe, które stanowią przedmiot zainteresowania Teorii Retraktów. Cofnijmy się więc w czasie do roku 1931, kiedy to młody wówczas Karol Borsuk wydał swą pracę "Sur les retractes", która była Jego rozprawą doktorską. Zapoczątkowała ona Teorię Retraktów, teorię, która okazała się użyteczna w wielu dziedzinach matematyki, również poza topologią.

Niech $A \subset X$. Zbiór A jest retraktem zbioru X wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja ciągła $r: X \to A$ spełniająca warunek $f(x) = x$ dla $x \in A$. Taką funkcję r nazywamy retrakcją zbioru X na A. Zbiór zwarty A jest retraktem absolutnym (AR) jeżeli jest retraktem każdego zbioru X zawierającego A. Każda kostka n-wymiarowa jest

---

4) Tj. zbiory homeomorficzne ze zwykłymi wielościanami.

retraktem absolutnym. Co więcej, retrakty absolutne pod wieloma względami przypominają kostki, np. mają własność punktu stałego [5]. Jednym z najważniejszych pojęć teorii retraktów jest pojęcie absolutnego retraktu otoczeniowego (ANR). Zbiór zwarty A jest ANR wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego X zawierającego A istnieje otoczenie U zbioru X w X takie że A jest retraktem zbioru U. Każdy wielościan jest ANR-em. Co więcej ANR-y pod wieloma względami przypominają wielościany. O ile jednak wielościany definiuje się geometrycznie (jako pewne sumy sympleksów), o tyle definicja ANR-u jest czysto topologiczna. Często o wiele łatwiej jest sprawdzić, czy zbiór jest ANR-em, niż sprawdzić, czy jest wielościanem. Np. do niedawna nie było wiadomo, czy rozmaitości topologiczne wymiaru $n \geq 3$ są wielościanami, łatwo natomiast pokazać, że są ANR-ami.[6]

Wspomniane tutaj dwie teorie bynajmniej nie stanowią całego dorobku naukowego Karola Borsuka. Niezależnie od Teorii Retraktów i Teorii Kształtu jest on twórcą metod badawczych oraz autorem twierdzeń, które znalazły trwałe miejsce w matematyce światowej. Do twierdzeń takich należy w szczególności Twierdzenie o antypodach, w myśl którego każde przekształcenie ciągłe f sfery S^n w przestrzeń Euklidesową E^n dla pewnej pary punktów antypodycznych $p,q \in S^n$ przyjmuje tę samą wartość $f(p)=f(q)$ [7]. Twierdzenie to zostało wcześniej sformułowane jako hipoteza przez S. Ulama, i stąd jest

---

5) Zbiór A ma własność punktu stałego wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej funkcji ciągłej $f: A \rightarrow A$ istenieje punkt $x \in A$ taki że $f(x) = x$.

6) Rozmaitość n-wymiarowa jest to zbiór zwarty i spójny , którego każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z n-wymiarową przestrzenią Euklidesową.

7) Punkty antypodyczne sfery są to punkty jej przecięcia prostą przechodzącą przez środek tej sfery.

często nazywane Twierdzeniem Borsuka-Ulama. Jak zauważył H.Steinhaus, z twierdzenia tego wynika, że w każdej chwili istnieją na powierzchni Ziemi dwa punkty antypodyczne o tym samym ciśnieniu i tej samej temperaturze.

Wiele zagadnień do dziś jeszcze otwartych nosi imię Karola Borsuka. Jego umiejętność stawiania interesujących i istotnych problemów była niezwykła. Inspirowały one pracę badawczą kilku pokoleń topologów i geometrów nie tylko w Polsce ale i w innych krajach.