**Artykuł Anny Stamirowskiej w „Wiadomościach Matematycznych”**

WIADOMOŚCI

# MATEMATYCZNE

ANNA STAMIROWSKA

## O pewnem twierdzeniu Ernesta Cesàro

WARSZAWA — 1937

ANNA STAMIROWSKA (WARSZAWA)

# O pewnem twierdzeniu Ernesta Cesàro.

Cesàro podał ocenę kresu górnego najmniejszego dzielnika $d \neq 1$ liczby doskonałej nieparzystej, posiadającej $k$ różnych dzielników pierwszych.

Ocena jego wynosi: $d \leqslant k\sqrt{2}$.

W niniejszej nocie (ułożonej bez znajomości pracy E. Cesàro), pokazuję, że powyższą ocenę można obniżyć do liczby $k$.

*Twierdzenie pomocnicze Carvalla*[1]. *Warunkiem koniecznym, aby liczba* (1) $n = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . \dots . p_k^{\alpha_k}$, gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k$ *oznaczają różne liczby pierwsze, była doskonała, jest, iżby było*

$$\frac{p_1}{p_1-1} . \frac{p_2}{p_2-1} . \dots . \frac{p_k}{p_k-1} > 2.$$

*Dowód.* Suma dzielników liczby $n$, (p. (1)), wyraża się wzorem

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} . \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} . \dots . \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} .$$

O ile więc $n$ jest liczbą doskonałą, to musi być spełnione równanie

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} . \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} . \dots . \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} = 2p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . \dots . p_k^{\alpha_k}.$$

Ale

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} < \frac{p}{p-1} \cdot p^{\alpha}$$

więc

$$\frac{p_1}{p_1-1} . \frac{p_2}{p_2-1} . \dots . \frac{p_k}{p_k-1} \cdot p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . \dots . p_k^{\alpha_k} > 2p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . \dots . p_k^{\alpha_k}.$$

---

[1]) J. Carvallo. Theorie des nombres parfaits. Paris, 1883.

skąd, po skróceniu, otrzymujemy

$$\frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k}{p_k-1} > 2 \text{ c. b. d. d.}$$

*Twierdzenie. Liczba nieparzysta, posiadająca k różnych dzielników pierwszych, nie może być doskonała, jeżeli jej najmniejszy dzielnik pierwszy jest* $\geqslant k$.

*Dowód.* Dla $k \leqslant 7$ Sylwester udowodnił twierdzenie dalej idące, że liczba nieparzysta, mająca mniej niż 8 różnych dzielników pierwszych, nie może być doskonała, jeżeli nie jest podzielna przez 3 [2]). Wystarczy więc podać dowód dla

$$k > 7. \tag{1}$$

Rozpatrzymy w tym celu liczbę nieparzystą

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, \qquad p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k, \tag{2}$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ oznaczają liczby pierwsze, przyczem zakładamy, że $p_1 \geqslant k$.

Różnica między dwiema kolejnemi liczbami pierwszemi nieparzystemi jest $\geqslant 2$, czyli mamy

$$p_1 \geqslant k,\ p_2 \geqslant k+2,\ p_3 \geqslant k+4, \ldots, p_k \geqslant 3k-2. \tag{3}$$

Ale liczby $k$, $k+2$, $k+4$ nie mogą być wszystkie pierwsze, bo jedna z nich jest podzielna przez 3. Przynajmniej więc w jednej z trzech pierwszych nierówności niema znaku =. Ale jeżeli $p_i > k+2\,(i-1)$, to tem samem

$$p_{i+1} > k+2i,\ p_{i+2} > k+2\,(i+1) \text{ i t. d.}$$

W ciągu nierówności (3), począwszy przynajmniej od trzeciej, możemy znak = opuścić. Mamy zatem

$$p_1 \geqslant k,\ p_2 \geqslant k+2,\ p_3 > k+4, \ldots, p_k > 3k-2, \tag{3'}$$

skąd

$$\frac{p_1}{p_1-1} \leqslant \frac{k}{k-1},\ \frac{p_2}{p_2-1} \leqslant \frac{k+2}{k+1},\ \frac{p_3}{p_3-1} < \frac{k+4}{k+3}, \ldots, \frac{p_k}{p_k-1} < \frac{3k-2}{3k-3}.$$

---

[2]) J. Sylvester. Sur une classe speciale des diviseurs de la somme d'une serie géometrique, Comptes-Rendus, 1888, str. 446-450.

Mnożąc stronami ostatnie nierówności, otrzymujemy

$$\frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k}{p_k-1} < \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k+2}{k+1} \cdot \ldots \frac{3k-2}{3k-3}.$$

Oznaczając

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{k+2}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{3k-2}{3k-3} = L(k),$$

możemy napisać

$$\frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k}{p_k-1} < L(k). \tag{4}$$

Udowodnimy teraz, że $L(k) < 2$, dla $k > 7$.

Dla $k = 8, 9$ można obliczyć bezpośrednio, że

$$L(8) = \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} = \frac{163840}{88179} < 2 \tag{5}$$

$$L(9) = \frac{9}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{15}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{21}{20} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{25}{24} = \frac{482885}{262144} < 2.$$

Zakładamy, że dla $k = t$

$$L(t) < 2. \tag{6}$$

Ponieważ mamy

$$L(t+2) = L(t) \cdot \frac{t-1}{3t-1} \cdot \frac{3t+2}{3t+1} \cdot \frac{3t+4}{t+1}; \tag{7}$$

$$\frac{t-1}{3t-1} \cdot \frac{3t+2}{3t+1} \cdot \frac{3t+4}{t+1} = \frac{9t^3+9t^2-10t-8}{9t^3+9t^2-t-1} < 1,$$

skąd, wobec (7),

$$L(t+2) < L(t),$$

to tem samem wynika z (6), że

$$L(t+2) < 2.$$

Skąd, wobec (5), wynika, że

$$L(k) < 2 \tag{8}$$

dla każdej wartości $k > 7$.

Z nierówności (4) i (8), mamy

$$\frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k}{p_k - 1} < 2,$$

a zatem, na podstawie twierdzenia Carvalla, możemy powiedzieć, że liczba $n$, przedstawiona wzorem (2), nie może być doskonała, jeżeli jej najmniejszy czynnik pierwszy jest $> k$.